Instituto Tecnológico de Lázaro Cárdenas
Ingeniería Electrónica

Extrapolación de Richardson

Asignatura: Análisis Numérico

Docente: M.C. Julio César Gallo Sanchez

Alumno: José Armando Lara Ramos

Equipo: 9

4º Semestre

May 8 de 2012

Extrapolación de Richardson

Resumen

En este documento se detalla la técnica de la Extraposición de Richardson utilizado para calcular integrales por métodos numéricos.

1. Introducción

La técnica se basa en la extrapolación de Richardson, el cual es un método que combina dos estimaciones numéricas de la integral para obtener una tercera, que tiene un valor más exacto. El algoritmo computacional para implementar en forma muy eficiente la extrapolación de Richardson se llama integración de Romberg. Esta técnica es recursiva y puede usarse para generar una estimación de la integral dentro de una tolerancia de error preespecificada.

2. Desarrollo del método

Las técnicas de corrección de errores se hallan también disponibles para mejorar los resultados de integración nu- mérica sobre la base de las mismas estimaciones de la integral. Esos métodos usan dos estimaciones de una integral para calcular una tercera más exacta, y se les conoce por lo general como extrapolación de Richardson. El error estimado y asociado con una aplicación múltiple de la regla trapezoidal puede representarse de manera general como

$$I = I(h) + E(h) \tag{1}$$

donde I =valor exacto de la integral, $I(h)$ = aproximación de una aplicación de n segmentos de la regla trapezoidal con un tamaño de paso $h = (b - a) \ln$, y $E(h) =$ error de truncamiento. Si hacemos dos estimaciones por separado mediante tamaños de paso de h_1 y h_2 y tienen valores exactos del error,

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2) \tag{2}$$

Ahora recuerde que el error de la aplicación múltiple de la regla trapezoidal puede representarse de manera aproximada por la ecuación

$$E \cong -\frac{b-a}{12} h^2 \bar{f}'' \tag{3}$$

Si en ésta se supone que $\bar{f}''$ es constante sin importar el tamaño de paso, la ecuación anterior se puede usar para determinar que la razón de los dos errores será

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \cong \frac{h_1^2}{h_1^2} \tag{4}$$

Este cálculo tiene un importante efecto en la remoción del término $\bar{f}''$ de la operación. Al hacer esto, hemos hecho posible utilizar la información contenida en la penúltima ecuación sin un conocimiento previo de la segunda derivada de la función. Para realizarlo, arreglemos de nuevo la ecuación anterior para tener

$$E(h_1) \cong F(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \tag{5}$$

La cual se puede sustituir en (2)

$$I(h_1) + E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \cong I(h_2) + E(h_2) \tag{6}$$

que puede resolverse para

$$E(h_2) \cong \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2} \tag{7}$$

Así, desarrollamos un estimado del error de truncamiento en términos de las estimaciones de la integral y de sus tamaños de paso. Dicha estimación puede entonces ser sustituida en

$$I = I(h_2) + E(h_2) \tag{8}$$

para dar una estimación mejorada de la integral:

$$I \cong I(h_2) + \frac{1}{(h_1/h_2)^2 - 1}[I(h_2) - I(h_1)] \tag{9}$$

Sp puede demostrar (Ralston y Rabinowitz, 1978) que el error de dicha estimación es $O(h^4)$. Así, cambiamos las estimaciones de la regla trapezoidal de $O(h^2)$ para obtener una nueva estimación de $O(h^4)$. Para el caso especial donde el intervalo es la mitad ($h_2 = h_1/2$), esta ecuación es ahora

$$I \cong I(h_2) + \frac{1}{(2^2 - 1}[I(h_2) - I(h_1)] \tag{10}$$

o, agrupando términos,

$$I \cong \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1) \tag{11}$$

3. Ejemplo

Correcciones de error de la regla trapezoidal

Enunciado del problema. La integral de $f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x + 675x - 900x + 400x$ desde $a = 0$ hasta $b = 0{,}8$. Por ejemplo, aplicaciones simples y múltiples de la regla trapezoidal dan los siguientes resultados:

Tabla 1: Datos

Segmentos	h	Integral	ϵ
1	0.8	0.1728	89.5
2	0.4	1.0688	34.9
4	0.2	1.4848	9.5

Use esta información junto con la ecuación (22.5) para calcular la estimación mejorada de la integral.

Solución Las estimaciones de uno y dos segmentos se pueden combinar para dar

$$I \cong \frac{4}{3}(1{,}0688) - \frac{1}{3}(0{,}1728) = 1{,}367467$$

El error de la integral mejorada es $E_t = 1{,}640533 - 1{,}367467 = 0{,}273067(\epsilon_t = 16{,}6\,\%)$, el cual es superior a las estimaciones sobre las cuales se basa.

De la misma manera, las estimaciones para dos y cuatro segmentos se pueden combinar para obtener

$$I \cong \frac{4}{3}(1{,}4848) - \frac{1}{3}(1{,}0688) = 1{,}623467$$

que representa un error de $E = 1{,}640533 - 1{,}623467 = 0{,}017067(\epsilon = 1{,}0\,\%)$.

Referencias

[1] D. Hearn, M. P. Baker, Gráficas por Computadora, 2o edición. Prentice Hall Hispanoamérica S.A., 1994.

[2] C. Delrieux, Introducción a la Computación Gráfica. Dep de Ingeniería Eléctrica, Universidad Nacional del Sur, 2000.

[3] T. Sederberg, BYU Bézier curves, Chapter 2

[4]J.D. Foley et al, Computer Graphics: Principles and Practice in C, 2nd ed., Addison Wesley,1992.