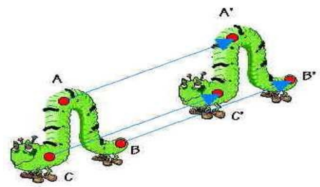
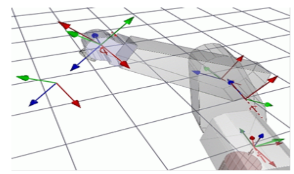
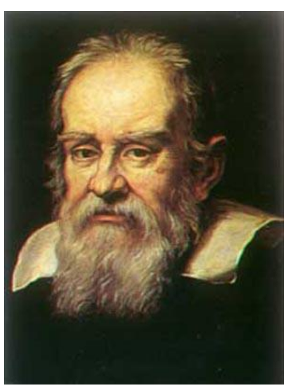
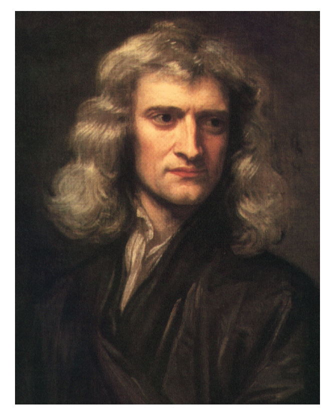
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE FISICA

FISICA GENERAL FIS1503

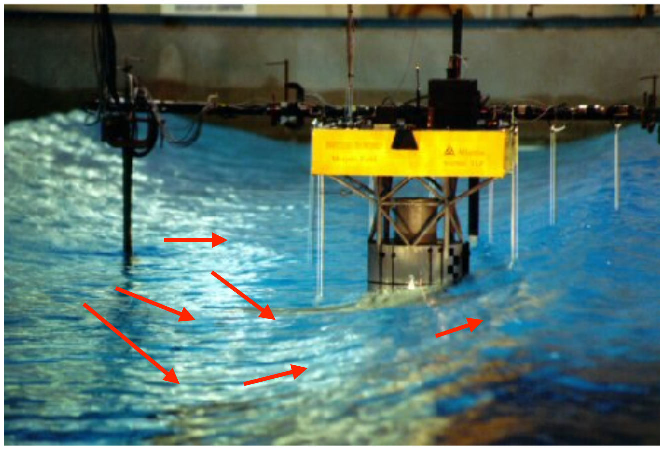
Dr. José Mejía López
Física Teórica, segundo piso
Anexo 7149
jmejia@puc.cl

Hidrodinámica

Describiremos el movimiento del fluido especificando (Leonar Euler 1707-1783)

$$\rho = \rho(\vec{r}, t) \qquad \vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}(\vec{r}, t)$$



Cualquier cantidad usada para definir el estado del fluido (presión ,temperatura, etc) tendrá un valor definido en cada punto en el espacio y en cada instante de tiempo

$$P = P(\vec{r}, t) \qquad T = T(\vec{r}, t)$$

Características generales de los fluidos

- El flujo de los fluidos puede ser estacionario (laminar) y no estacionario

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}(\vec{r})$$

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}(\vec{r}, t)$$

- El flujo puede ser compresible y no compresible

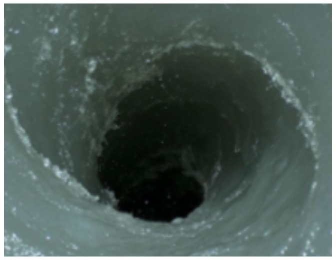
$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0(t) = \text{espacialmente constante}$$

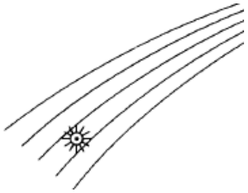
- El flujo puede ser viscoso y no viscoso

Conservación de energía mecánica

- El flujo puede ser rotacional o no rotacional

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{0}$$

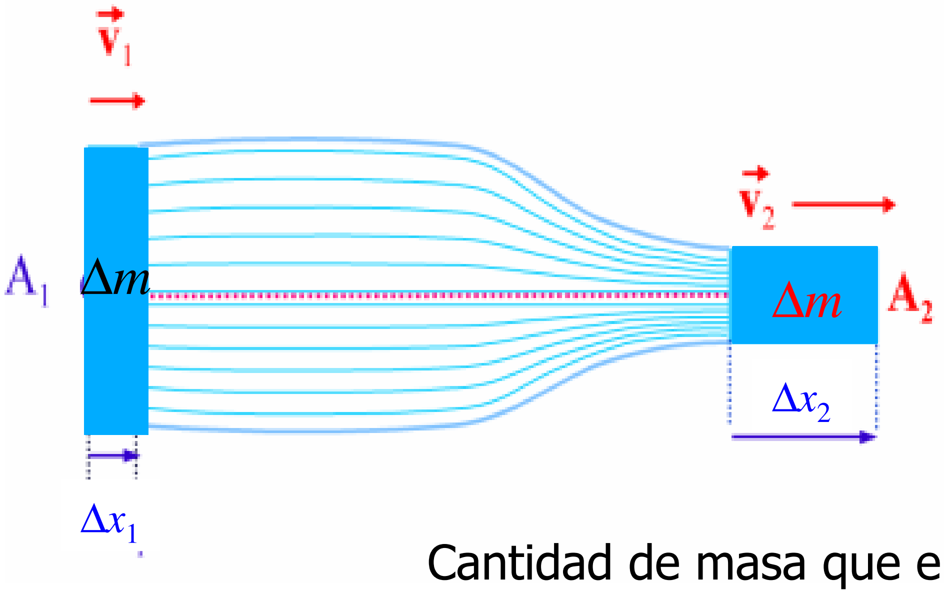




Para simplificar la descripción matemática del movimiento de un fluido, limitaremos nuestra atención en su mayor parte al flujo estacionario, no compresible, no viscoso y no rotacional

Ecuación de continuidad

Es una consecuencia del principio de conservación de la masa



Cantidad de masa que entra por la izquierda:

$$\Delta m = \rho_1 \Delta V = \rho_1 A_1 \Delta x_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$$

Cantidad de masa que sale por la derecha:

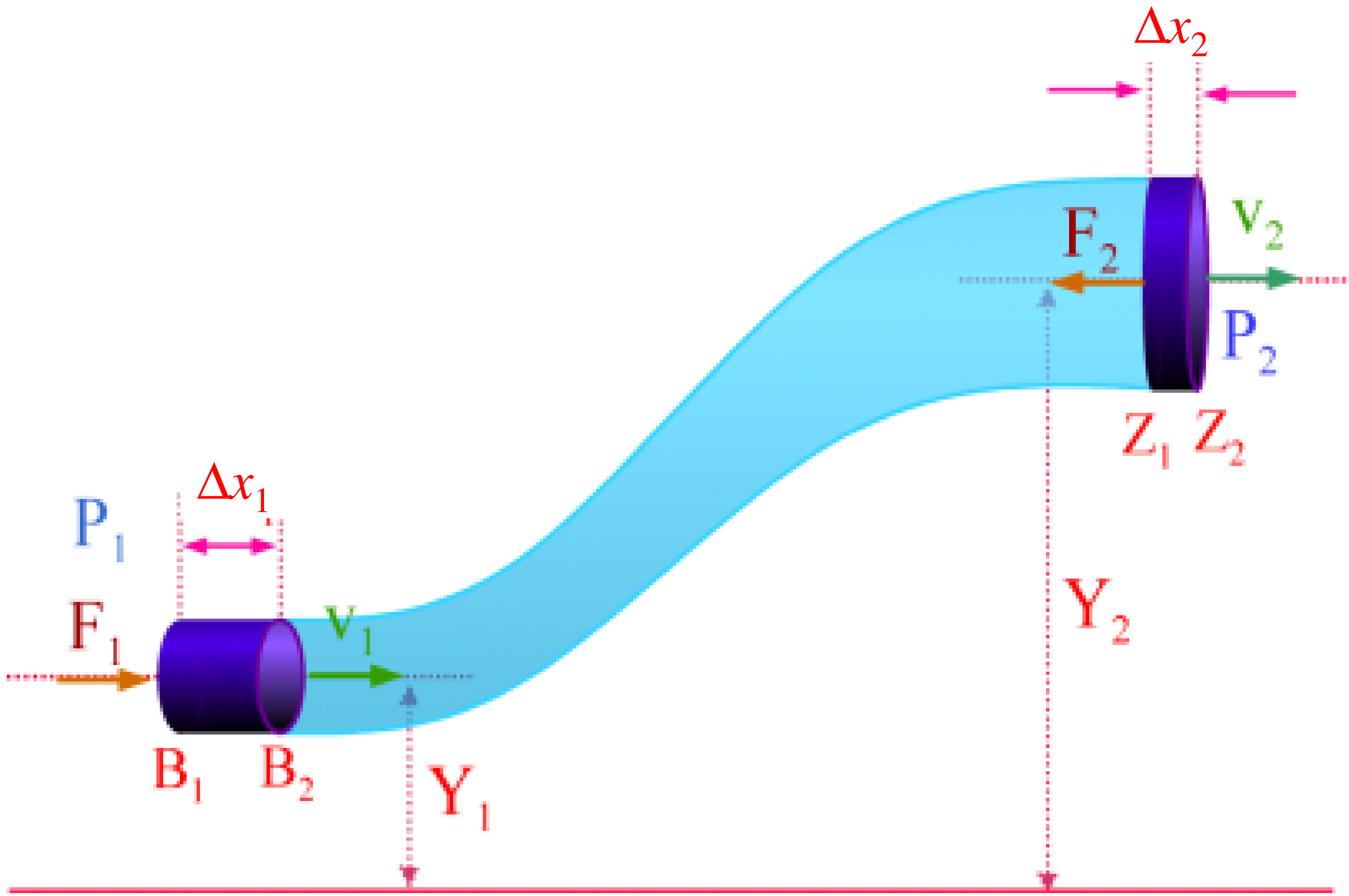
$$\Delta m = \rho_2 \Delta V = \rho_2 A_2 \Delta x_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

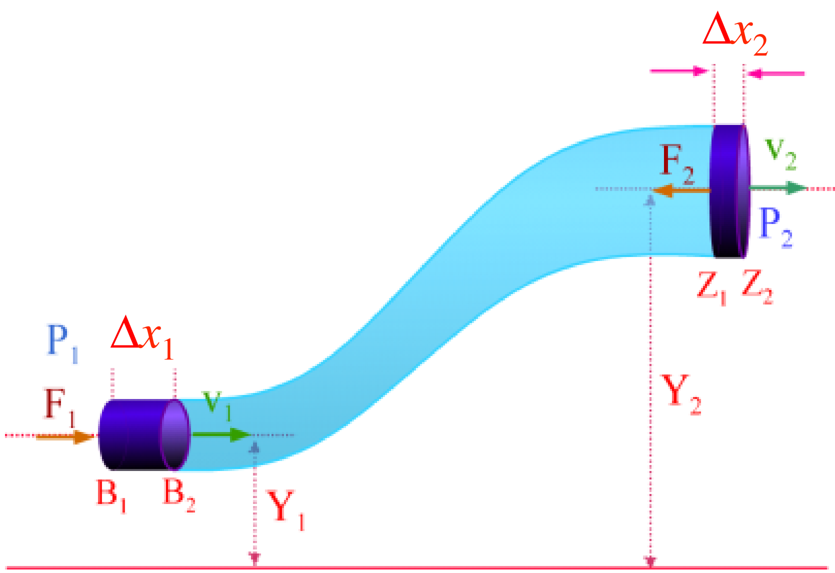
$$\Rightarrow \boxed{\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2}$$

$$\text{caudal} \equiv Av$$

Ecuación de Bernoulli

Esta ecuación es una consecuencia del teorema del trabajo y la energía (conservación de energía).





$$\Delta W_1 = F_1 \Delta x_1 \cos 0^\circ = P_1 A_1 \Delta x_1 = P_1 \Delta V$$

$$\Delta W_2 = F_2 \Delta x_2 \cos 180^\circ = -P_2 A_2 \Delta x_2 = -P_2 \Delta V$$

$$\Delta W_F = \left(P_1 - P_2\right) \Delta V$$

$$\Delta W_g = mg\left(y_2 - y_1\right)\cos 180^\circ \quad = -\rho \Delta V g\left(Y_2 - Y_1\right)$$

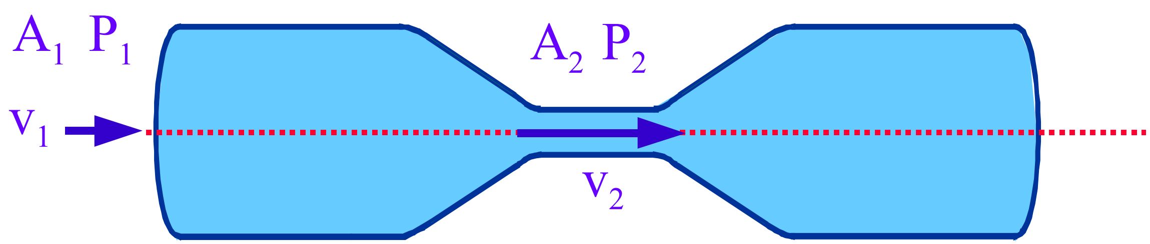
$$\Delta K = \frac{1}{2}\Delta m\left(v_2^2 - v_1^2\right) \quad = \frac{1}{2}\rho \Delta V\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$\Delta W_F + \Delta W_g = \Delta K \quad \Rightarrow \quad \left(P_1 - P_2\right)\Delta V - \rho \Delta V g\left(y_2 - y_1\right) = \frac{1}{2}\rho \Delta V\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cte}}$$

Efecto Venturi

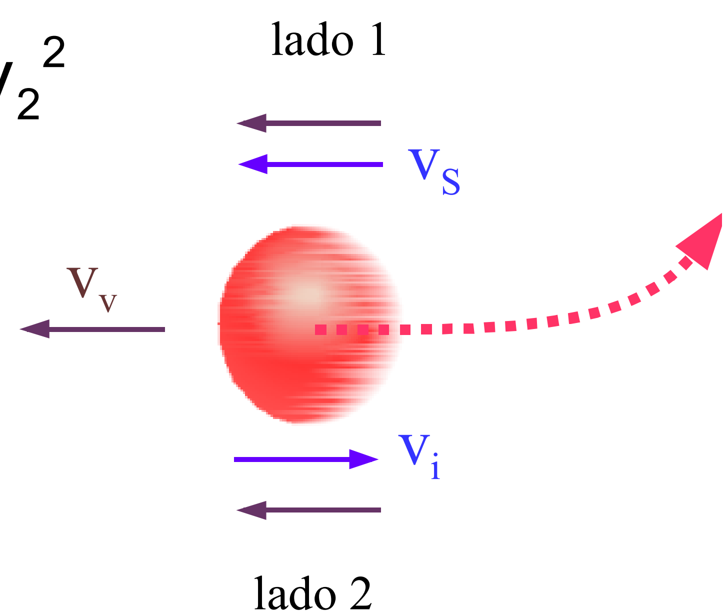
La velocidad del fluido es mayor en los puntos en que la presión es menor.

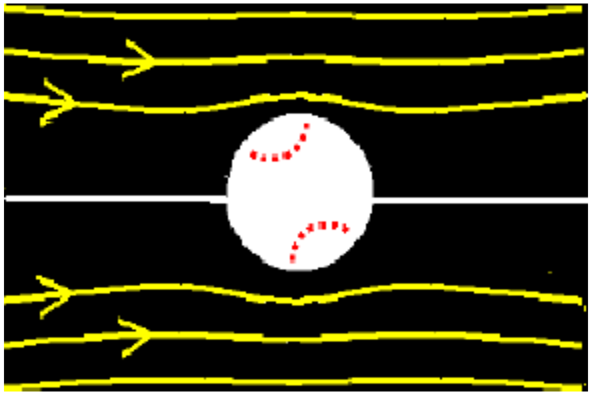


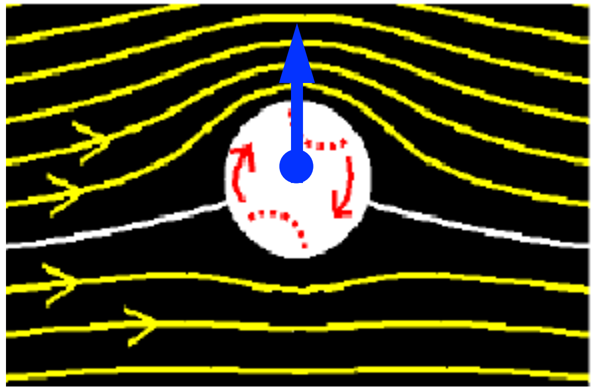
$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

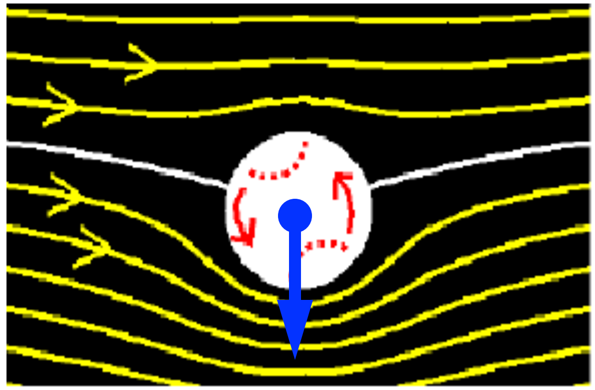
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

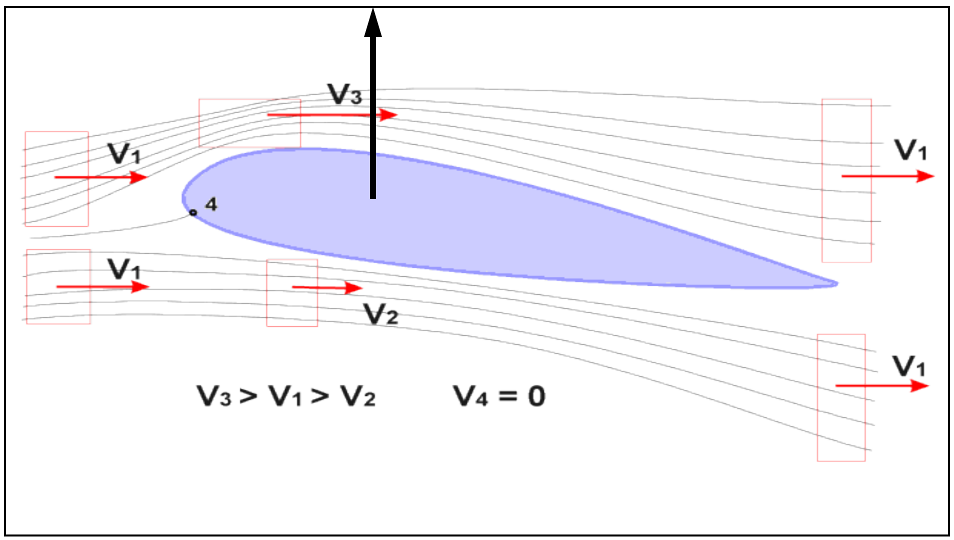
$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

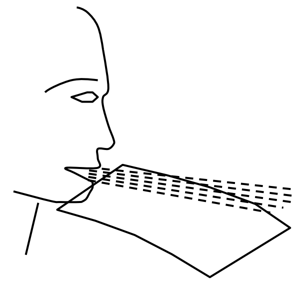


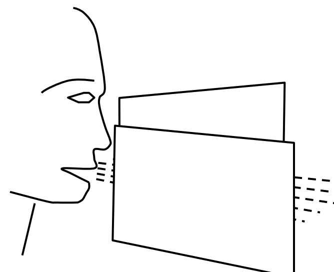




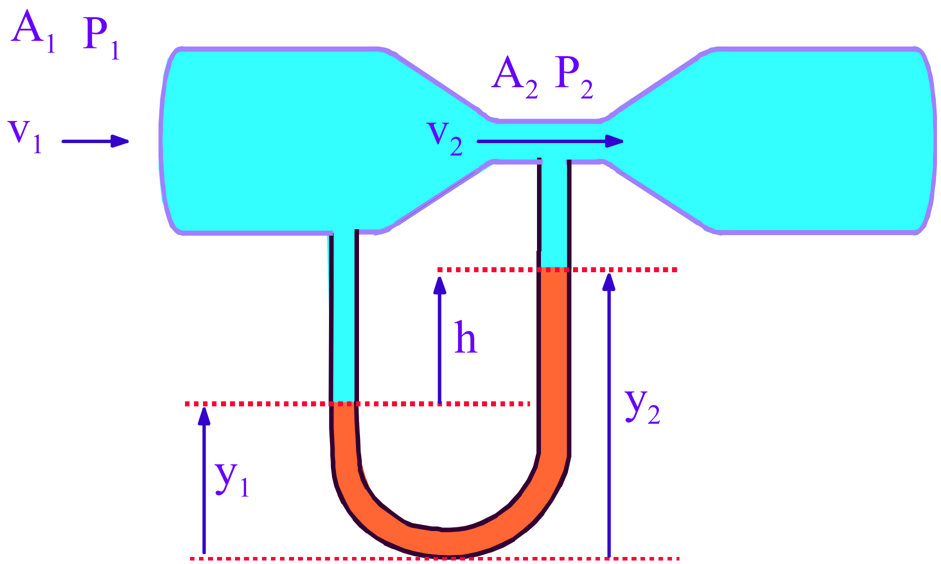



V_3
V_1
V_1
4
V_1
V_2
V_1
$V_3 > V_1 > V_2$
$V_4 = 0$





Tubo de Venturi



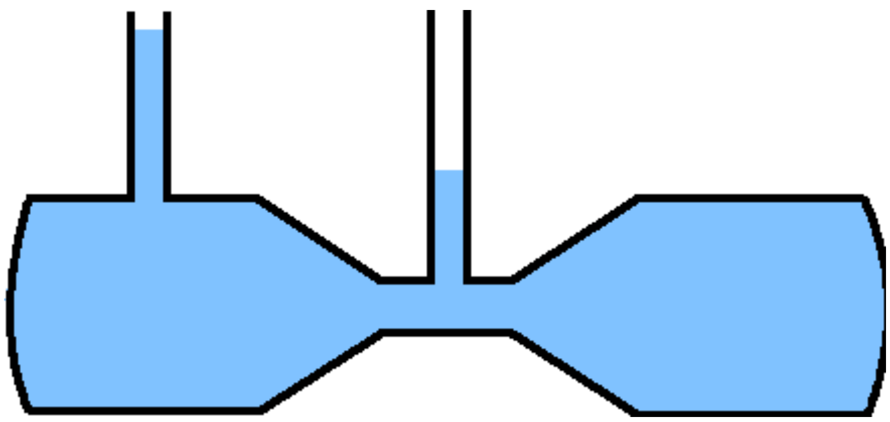
$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_1^2 v_1^2}{A_2^2} - v_1^2\right)$$

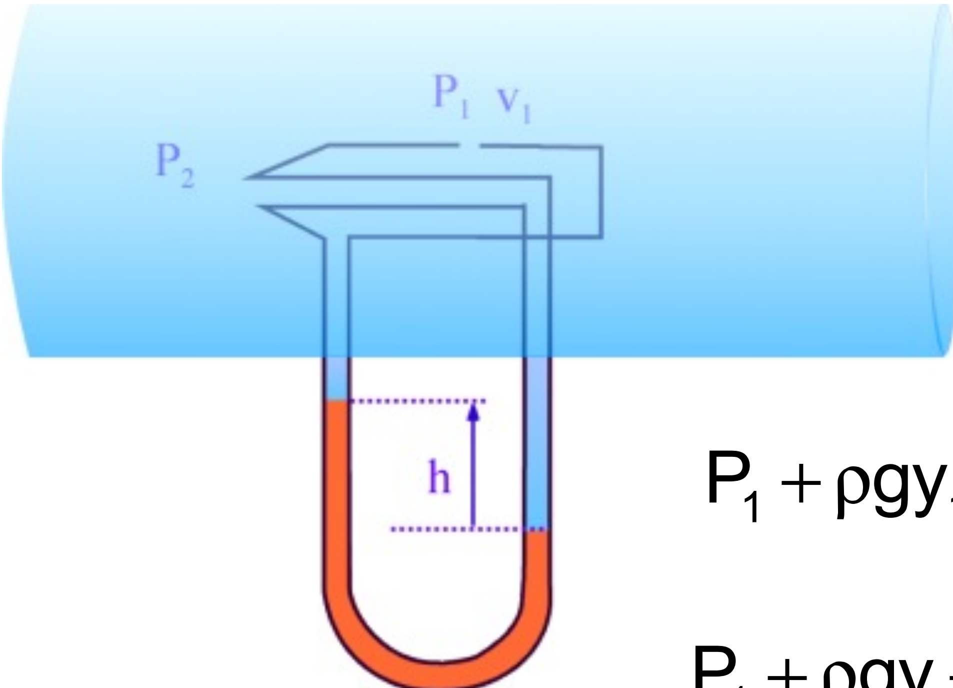
$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)$$

$$v_1^2 = \frac{2\left(P_1 - P_2\right)}{\rho\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)}$$



Tubo de Venturi

Tubo de Pitot-Prandt

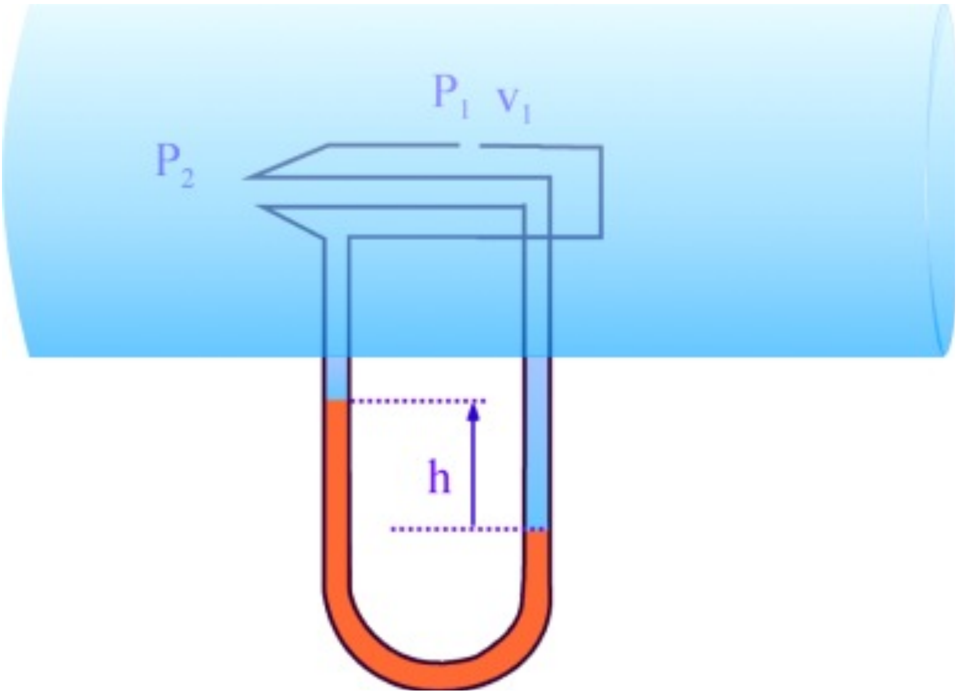


$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2$$

$$P_1 + \rho g y + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 \; = P_2 + \rho g y + \frac{1}{2}\rho (0)^2$$

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho {v_1}^2$$

Tubo de Pitot-Prandt



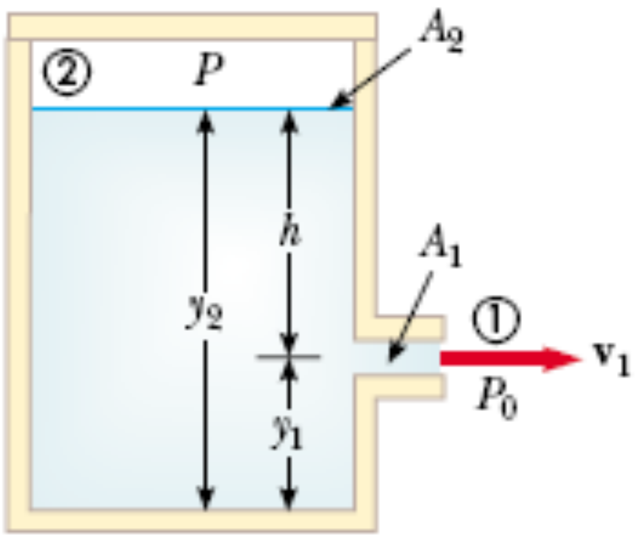
$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho v_1^{\,2}$$

$$P_2 - P_1 = \rho_{hg} g h$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^{\,2} = \rho_{hg} g h$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\rho_{hg} g h}{\rho}}$$

Calcular la velocidad de salida del fluido



$$P_1 + \rho g y_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_0 + \rho g y_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = P + \rho g y_2 + \frac{A_1^2}{2A_2^2}\rho v_1^2$$

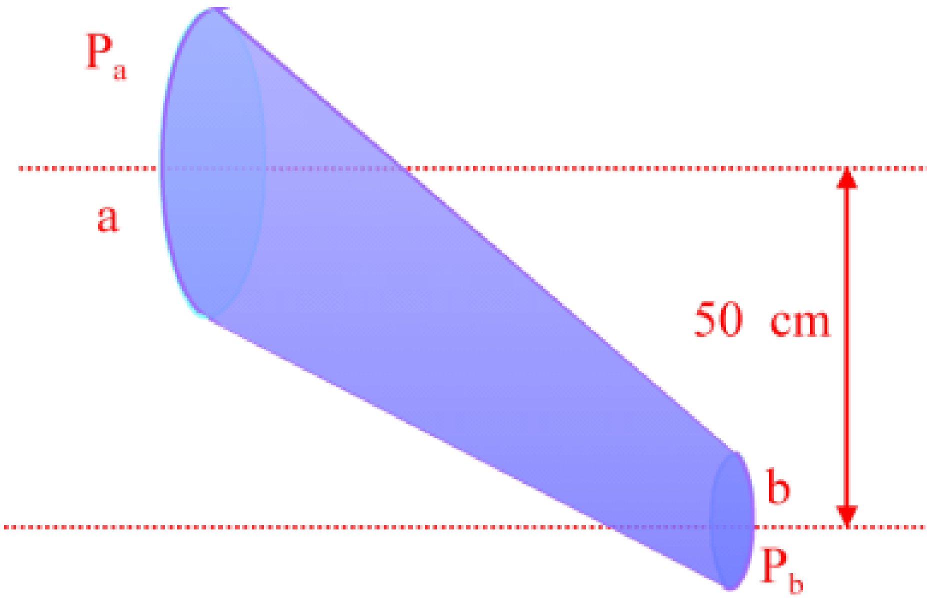
$$v_1^2 = \left[\frac{2(P-P_0)}{\rho} + 2g(y_2 - y_1)\right]\left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right)^{-1}$$

$$v_1 = \sqrt{\left[\frac{2(P-P_0)}{\rho} + 2gh\right]\left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right)^{-1}}$$

Si $A_1 << A_2$ entonces

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P-P_0)}{\rho} + 2gh}$$

Por una tubería inclinada circula agua a razón de 9 m^3/min, como se muestra en la figura: En a el diámetro es 30 cm y la presión es de 10^5 Pa. ¿Cuál es la presión en el punto b sabiendo que el diámetro es de 15 cm y que el centro de la tubería se halla 50cm más bajo que en a?



$$A_A v_A = A_B v_B = Q$$

$$v_A = \frac{Q}{A_A} = \frac{\frac{9m^3}{60s}}{\pi 0.15^2 m^2} = 2.12\frac{m}{s}$$

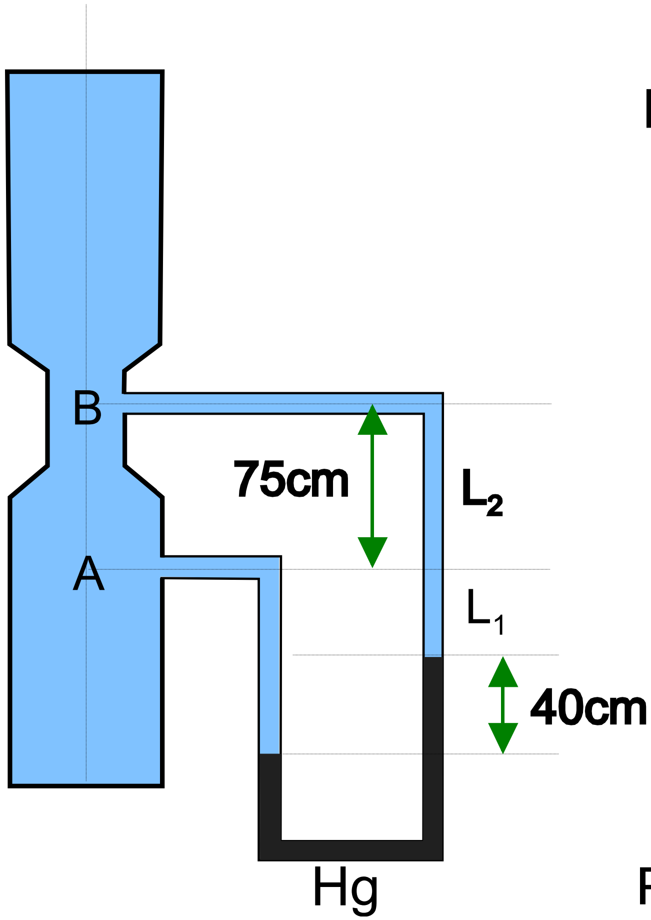
$$v_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{\frac{9m^3}{60s}}{\pi 0.075^2 m^2} = 8.49\frac{m}{s}$$

$$P_A + \rho g y_A + \tfrac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \rho g y_B + \tfrac{1}{2}\rho v_B^2$$

$$P_B = P_A + \rho g (y_A - y_B) + \tfrac{1}{2}\rho (v_A^2 - v_B^2)$$

$$P_B = 7.11\times 10^4\, Pa$$

Calcule el caudal de agua en el venturímetro vertical de la figura si el diámetro en la parte angosta (B) es de 15 cm y en la parte ancha (A) es de 30 cm. El desnivel entre las columnas de mercurio en el tubo en U es de 40 cm. El agua sube por el venturímetro.



$$P_A + \rho_{agua} g y_A + \frac{1}{2}\rho_{agua} v_A^2 = P_B + \rho_{agua} g y_B + \frac{1}{2}\rho_{agua} v_B^2$$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho_{agua}\left(v_B^2 - v_A^2\right) + \rho_{agua} g\left(y_B - y_A\right)$$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho_{agua}\left(v_B^2 - v_A^2\right) + \rho_{agua} g L_2 \qquad (1)$$

$$P_3 = P_4$$

$$P_A + \rho_{agua} g(L_1 + 0.4) = P_B + \rho_{agua} g(L_1 + L_2) + \rho_{Hg} g(0.4)$$

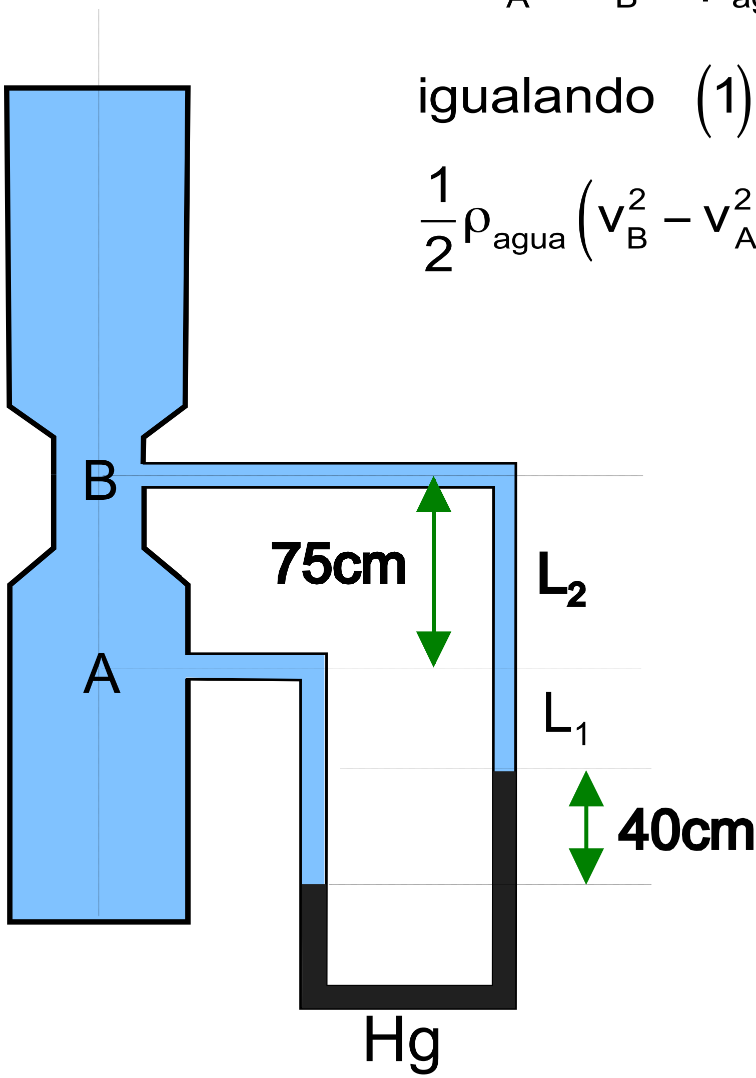
$$P_A - P_B = \rho_{agua} g L_2 + \rho_{Hg} g(0.4) - \rho_{agua} g(0.4) \qquad (2)$$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho_{agua}\left(v_B^2 - v_A^2\right) + \rho_{agua} g L_2 \qquad (1)$$

$$P_A - P_B = \rho_{agua} g L_2 + \rho_{Hg} g(0.4) - \rho_{agua} g(0.4) \qquad (2)$$

igualando (1) con (2)

$$\frac{1}{2}\rho_{agua}\left(v_B^2 - v_A^2\right) + \rho_{agua} g L_2 = \rho_{agua} g L_2 + \rho_{Hg} g(0.4) - \rho_{agua} g(0.4)$$

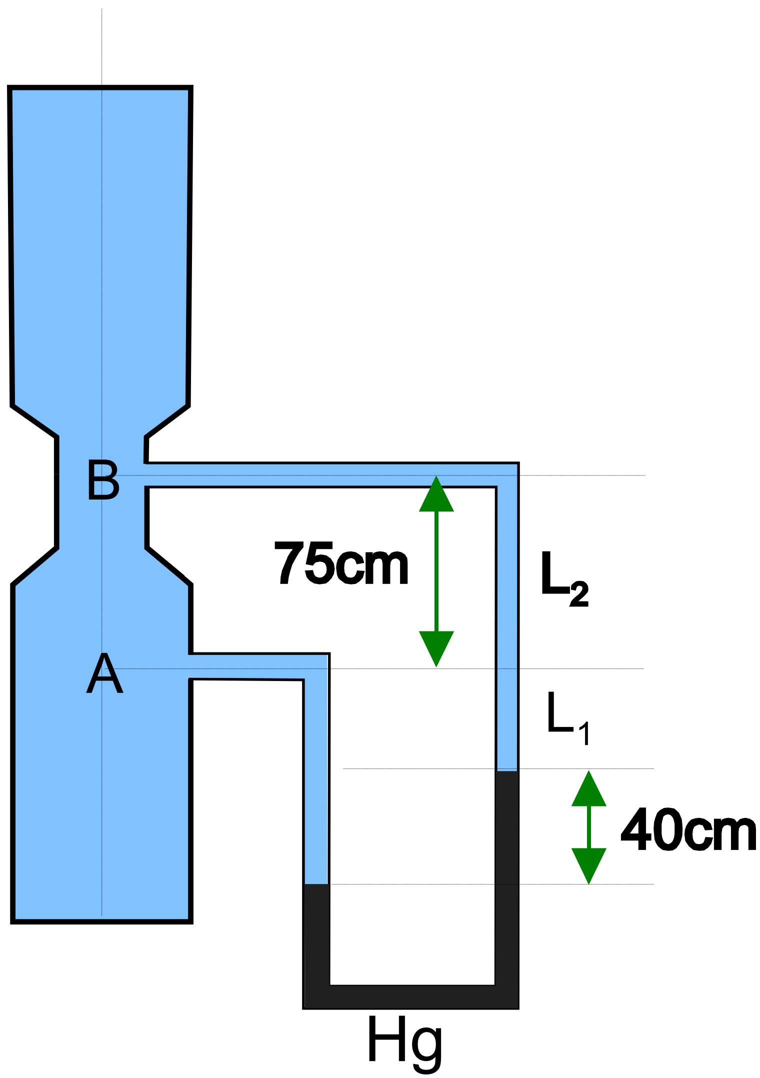


$$\frac{1}{2}\rho_{agua}\left(v_B^2 - v_A^2\right) = \rho_{Hg} g(0.4) - \rho_{agua} g(0.4)$$

$$\left(v_B^2 - v_A^2\right) = \frac{2\left[\rho_{Hg} g(0.4) - \rho_{agua} g(0.4)\right]}{\rho_{agua}}$$

$$\left(v_B^2 - v_A^2\right) = \frac{2\left[13.6 * 9.8 * 0.4 - 1 * 9.8 * 0.4\right]}{1}$$

$$v_B^2 - v_A^2 = 98.784 \qquad (3)$$



$$v_B^2 - v_A^2 = 98.784 \qquad (3)$$

$$A_A v_A = A_B v_B$$

$$v_B = \frac{A_A}{A_B} v_A = \frac{\pi r_A^2 v_A}{\pi r_B^2} = \frac{15^2 v_A}{7.5^2}$$

$$v_B = 4 v_A \qquad (4)$$

reemplazando (4) en (3)

$$(4v_A)^2 - v_A^2 = 98.784$$

$$v_A = 2.566 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$Q = \pi r_A^2 v_A = 3.14 * 0.15^2 * 2.566$$

$$Q = 0.181 \left[\frac{m^3}{s}\right]$$