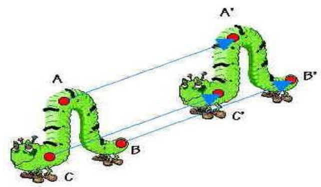
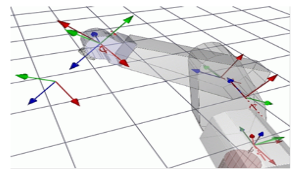
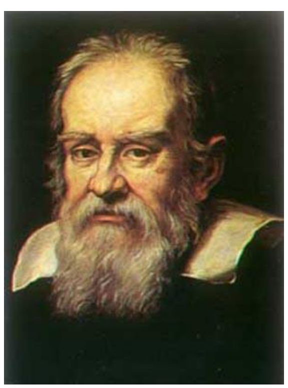
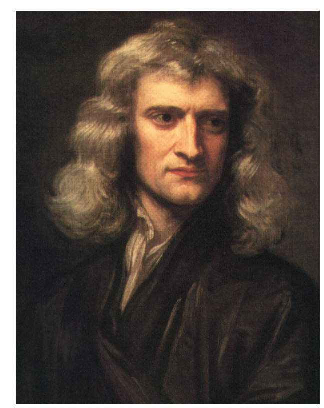
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE FISICA

FISICA GENERAL FIS1503

Dr. José Mejía López
Física Teórica, segundo piso
Anexo 7149
jmejia@puc.cl

Capítulo 6

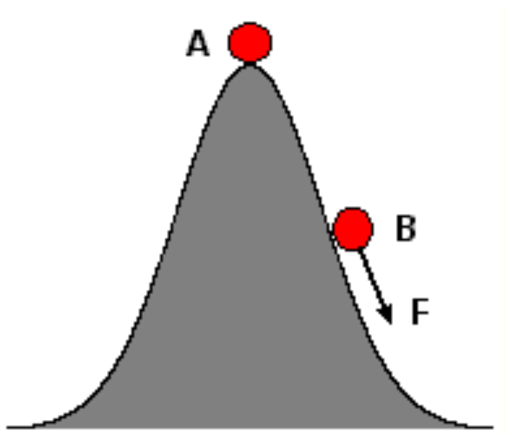
Oscilaciones

Equilibrio

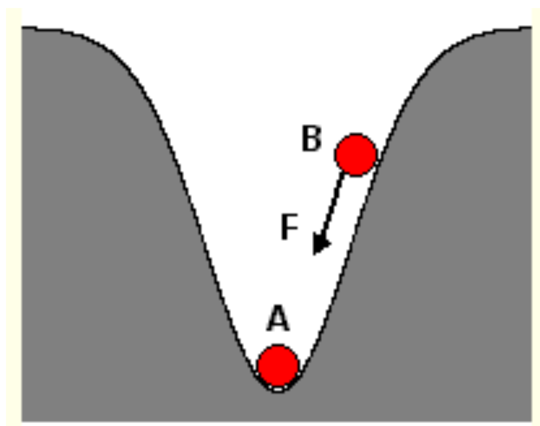
Las condiciones para el equilibrio mecánico son

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \qquad \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{0}$$

Un sistema físico puede estar en equilibrio estable o en equilibrio inestable. Lo que caracteriza a estas situaciones es el comportamiento del sistema cuando es apartado infinitesimalmente del estado de equilibrio inicial.



Equilibrio inestable: el objeto acelera alejándose de la posición de equilibrio

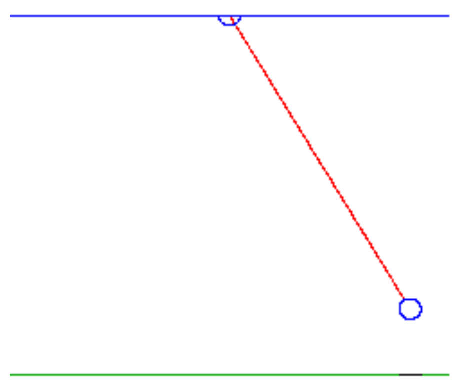


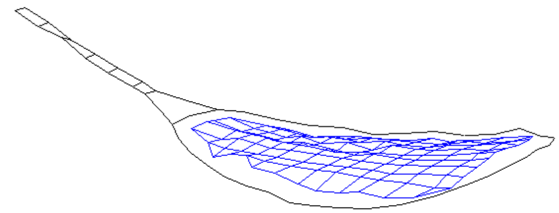
Equilibrio estable: el objeto acelera acercándose a la posición de equilibrio

Equilibrio indiferente: el objeto permanece en equilibrio en la nueva posición

Movimiento oscilatorio

Un movimiento oscilatorio es un movimiento alrededor de un punto de equilibrio estable.





Características del movimiento:

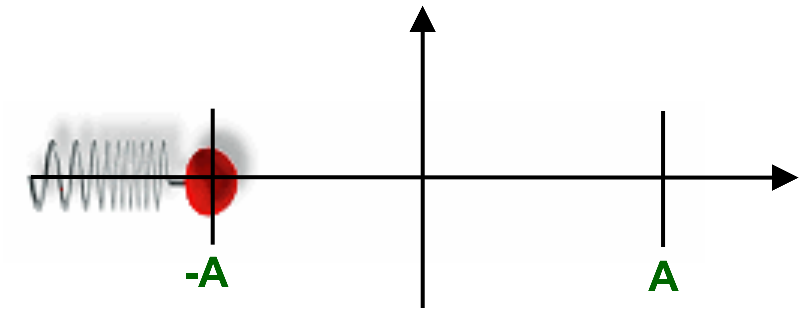
- Aparece una fuerza en sentido opuesto al desplazamiento (fuerza restauradora). Tendencia a volver a la posición de equilibrio.

- Existe un tiempo característico, el **Período**: tiempo asociado a una oscilación completa

- La **frecuencia** de oscilación (número de oscilaciones por unidad de tiempo) está determinada por parámetros físicos del sistema.

- El movimiento se describe usando las leyes de Newton.

Movimiento Armónico simple



Segunda ley de Newton

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

A lo largo del eje X:

$$-kx = ma \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{k}{m}x \quad \Rightarrow \quad a = -\omega^2 x$$

M.A.S.

La aceleración no es constante, se debe resolver una ecuación diferencial:

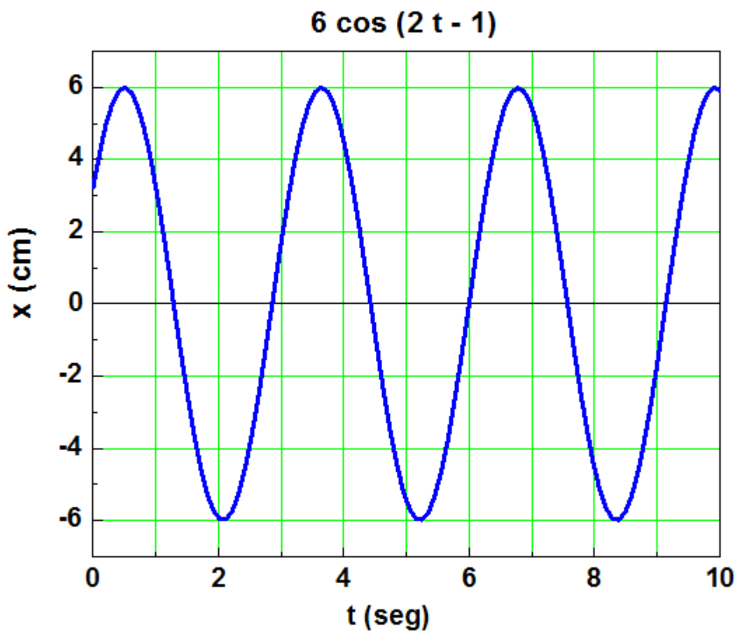
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

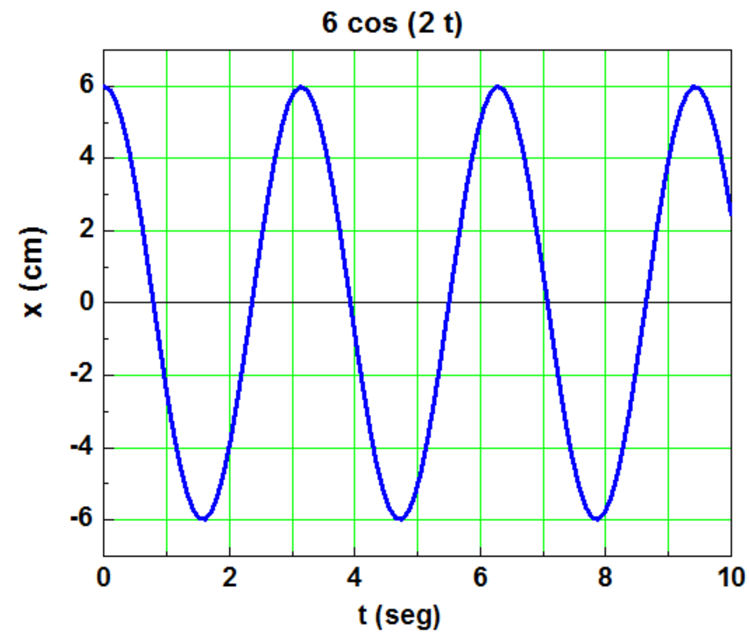
La solución más general de esta ecuación es

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

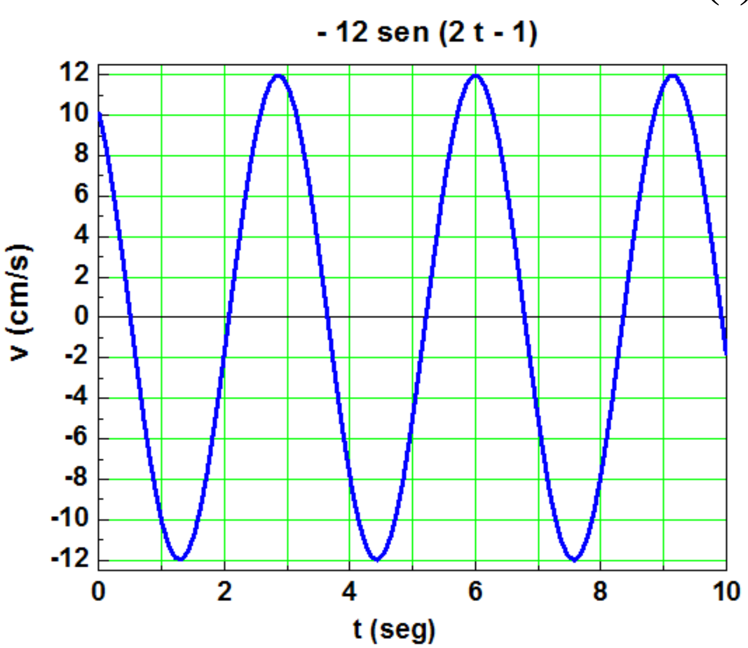
A, ω y δ y son constantes; A es la amplitud , ω es la frecuencia angular y δ es la constante de fase.

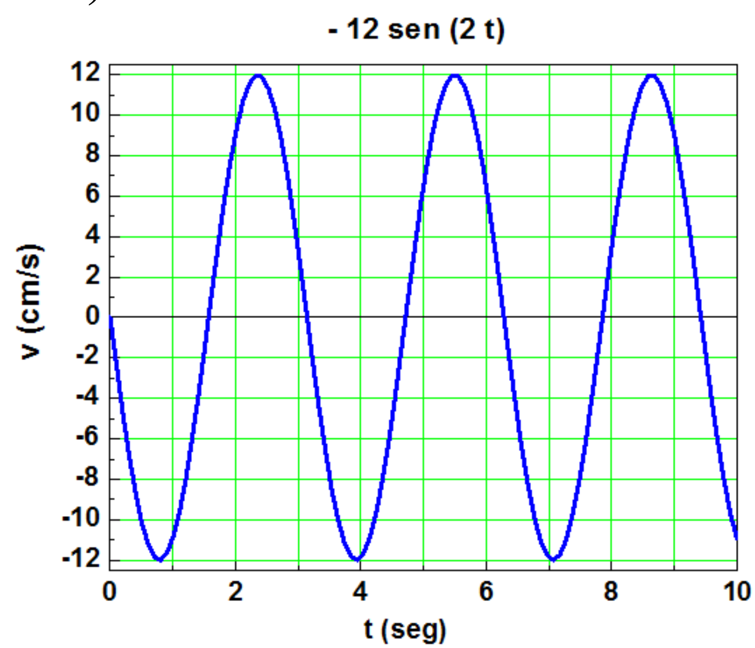
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$





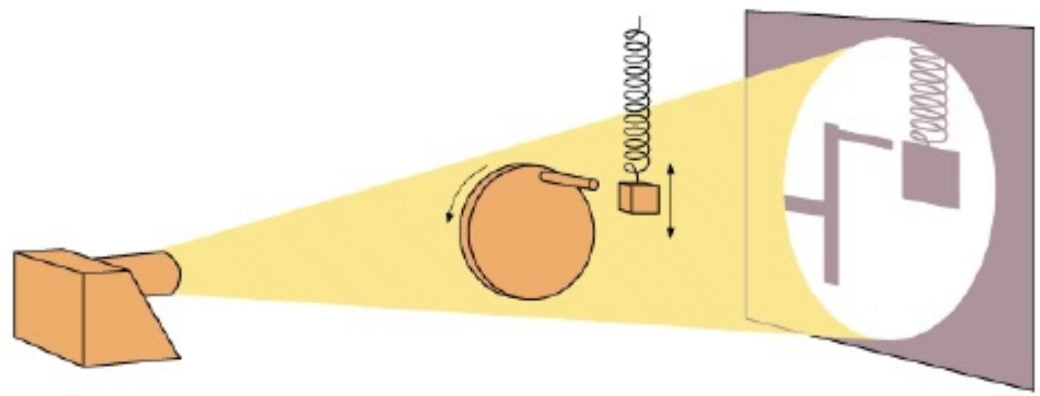
$$v(t) = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

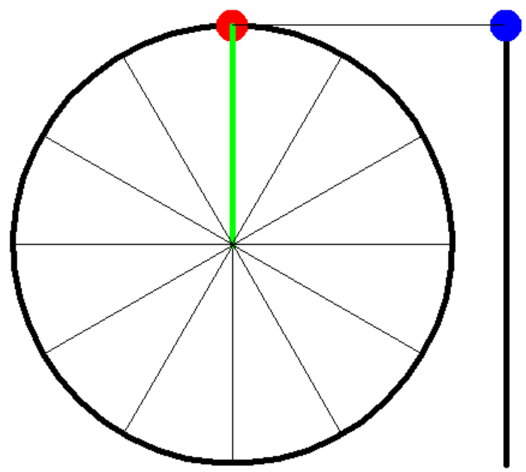




Relación del M.A.S con el movimiento circular

El movimiento armónico simple es la proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro del círculo en el cual el movimiento circular ocurre.





La frecuencia angular es equivalente a la velocidad angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Ejemplo

Un objeto oscila con frecuencia de 8 Hz. Inicialmente se encontraba en x = 4 cm con una velocidad de -25 cm/s. (a) Escribir la posición como función del tiempo. (b) ¿Qué velocidad tienen el objeto en el instante igual a la mitad de su período?

a)

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = A\cos\delta \\ \mathrm{v}_0/\omega = -A\,\mathrm{sen}\,\delta \end{cases} \Rightarrow x_0^2 + \mathrm{v}_0^2/\omega^2 = A^2$$

$$\mathrm{v}(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \mathrm{v}_0^2/\omega^2} = \sqrt{x_0^2 + \mathrm{v}_0^2/(4\pi^2 f^2)} = 4.03\ \mathrm{cm}$$

$$tg\,\delta = -\frac{\mathrm{v}_0}{\omega x_0} = -\frac{\mathrm{v}_0}{2\pi f x_0} = 0.12434 \Rightarrow \delta = 0.12\ \mathrm{rad}$$

Por tanto

$$x(t) = 4.03\cos(16\pi t + 0.12)\ \mathrm{cm}$$

b)

$$\mathrm{v}(T/2) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega T/2 + \delta) = -A\omega\,\mathrm{sen}(2\pi/2 + \delta) = -(4.03)(16\pi)\sin\left(\pi + 0.12\right)$$

$$= -11.53\ \mathrm{cm/s}$$

Energía mecánica en un Movimiento Armónico simple

La energía potencial del sistema está dado por

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

La energía cinética está dada por

$$K = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \delta)$$

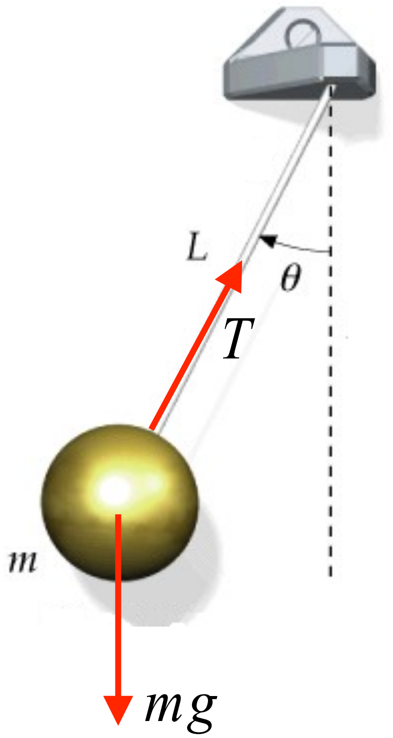
Por tanto la energía del M.A.S. sería

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \left[\operatorname{sen}^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta)\right]$$

$$\Rightarrow \qquad E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

Péndulo simple

El sistema consiste en una partícula de masa m que cuelga de un cuerda sin masa e inextensible de largo L.



Ecuación de movimiento:

$$\tau = I\alpha \quad \Rightarrow \quad m\,g\,L\,\mathrm{sen}\,\theta = -m\,L^2\,\alpha$$

$$\Rightarrow \quad g\,\mathrm{sen}\,\theta = -L\alpha$$

Si consideramos oscilaciones pequeñas (θ < 20°):

$$\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$$

entonces

$$\alpha = -\frac{g}{L}\theta$$

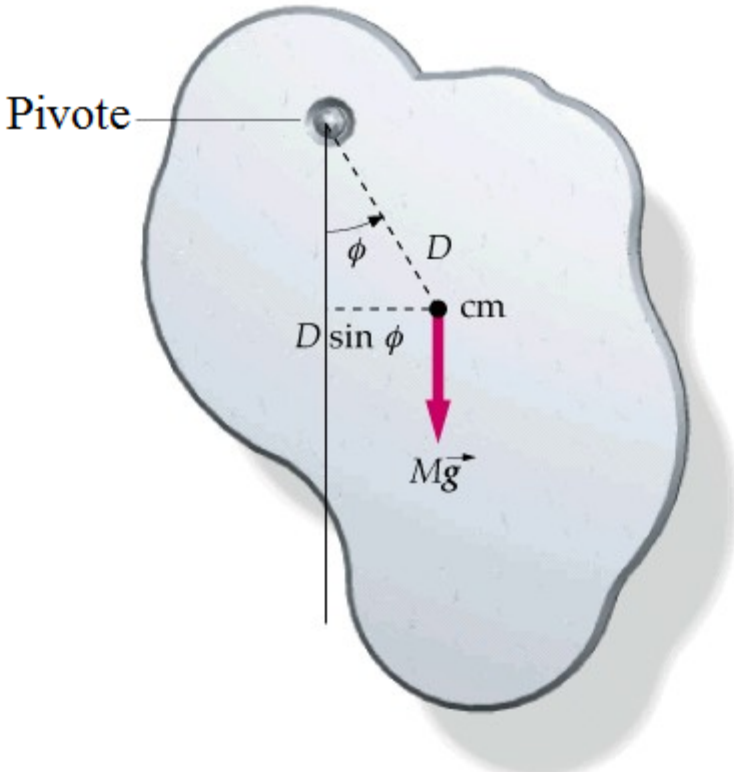
M.A.S

La frecuencia angular es entonces

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Péndulo físico

Un péndulo real con una distribución de masa cualquiera:



Ecuación de movimiento:

$$\tau = I\alpha \quad \Rightarrow \quad M\,g\,D\,\mathrm{sen}\,\phi = -I\,\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -\frac{MgD}{I}\,\mathrm{sen}\,\phi$$

Si consideramos oscilaciones pequeñas (ϕ < 20°):

$$\mathrm{sen}\,\phi \approx \phi$$

entonces

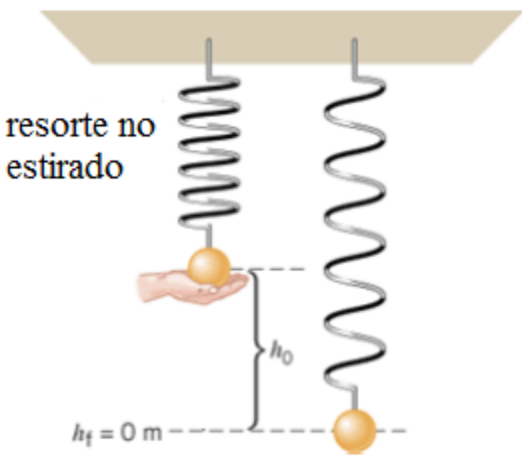
$$\alpha = -\frac{MgD}{I}\phi \qquad \textbf{M.A.S}$$

La frecuencia angular es entonces

$$\omega = \sqrt{\frac{MgD}{I}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}$$

Ejemplo

Una pelota de 0.2 kg está unido a un resorte vertical. La constante elástica del resorte es 28 N/m. La pelota, sostenida inicialmente de manera que el resorte se encuentra en su longitud natural, se libera del reposo. a) ¿Cuál sería la nueva posición de equilibrio? b)¿Cuál es su período de oscilación? c) Escribir la posición y la velocidad en función del tiempo



a) En el nuevo equilibrio

$$k h_0 - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad h_0 = mg/k = 7 \text{ cm}$$

b) Segunda ley de Newton:

$$k(h_0 - x) - mg = ma \quad \Rightarrow \quad k\frac{mg}{k} - kx - mg = ma$$

$$a = -\frac{k}{m}x \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.53 \text{ s}$$

c)

$$A = \sqrt{x_0^2 + \text{v}_0^2/\omega^2} = h_0 = 7 \text{ cm} \qquad tg\,\delta = -\frac{\text{v}_0}{\omega x_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0$$

$$x(t) = 7\cos(11.83\,t) \text{ cm} \qquad \text{v}(t) = -82.83\,\text{sen}(11.83\,t) \text{ cm/s}$$

Oscilaciones amortiguadas

- Sea $\vec{F}_a$ la fuerza de amortiguamiento y asumiremos que es proporcional a la velocidad del movimiento

$$\vec{F}_a = -b\vec{\mathrm{v}}$$

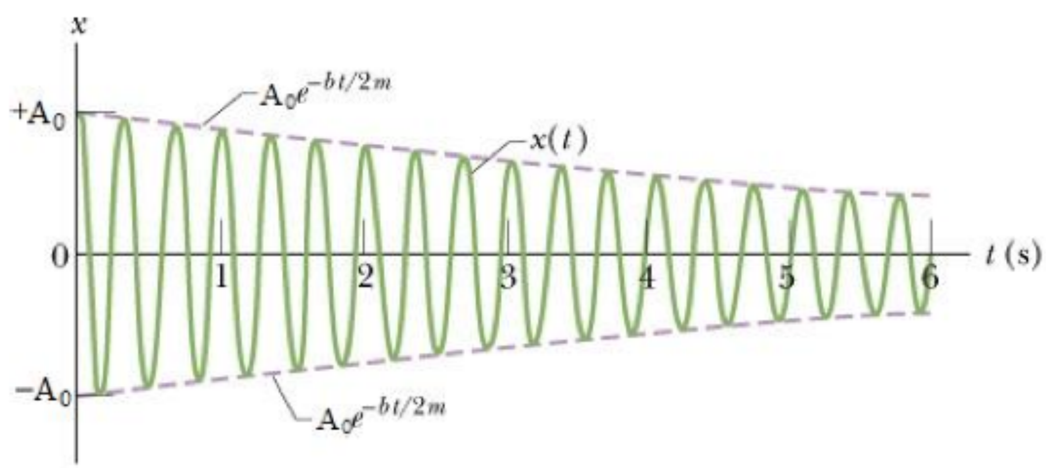
El signo menos indica que la fuerza se opone al movimiento.

- Escribiendo la Segunda ley de Newton para el sistema mostrado

$$-m\omega_0^2 x - b\mathrm{v} \; = \; m\,a$$

- La solución de esta ecuación es

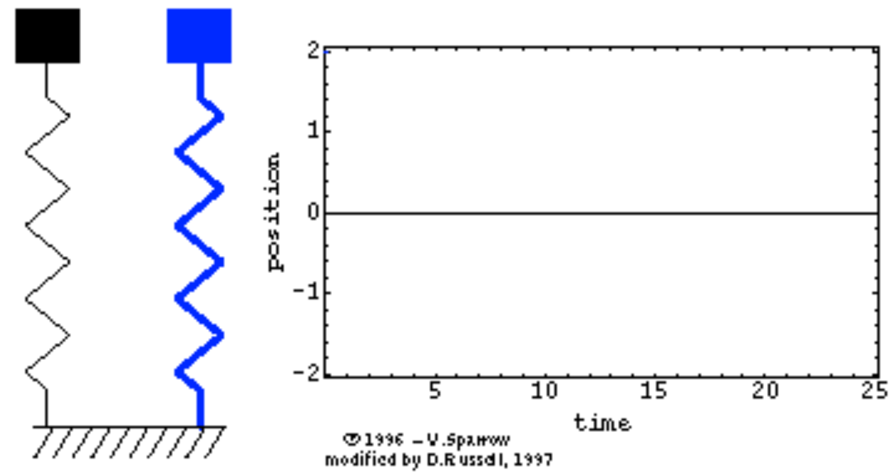
$$\boxed{x(t) = A_0\,\mathrm{e}^{-\frac{bt}{2m}}\cos(\omega t + \delta)}$$

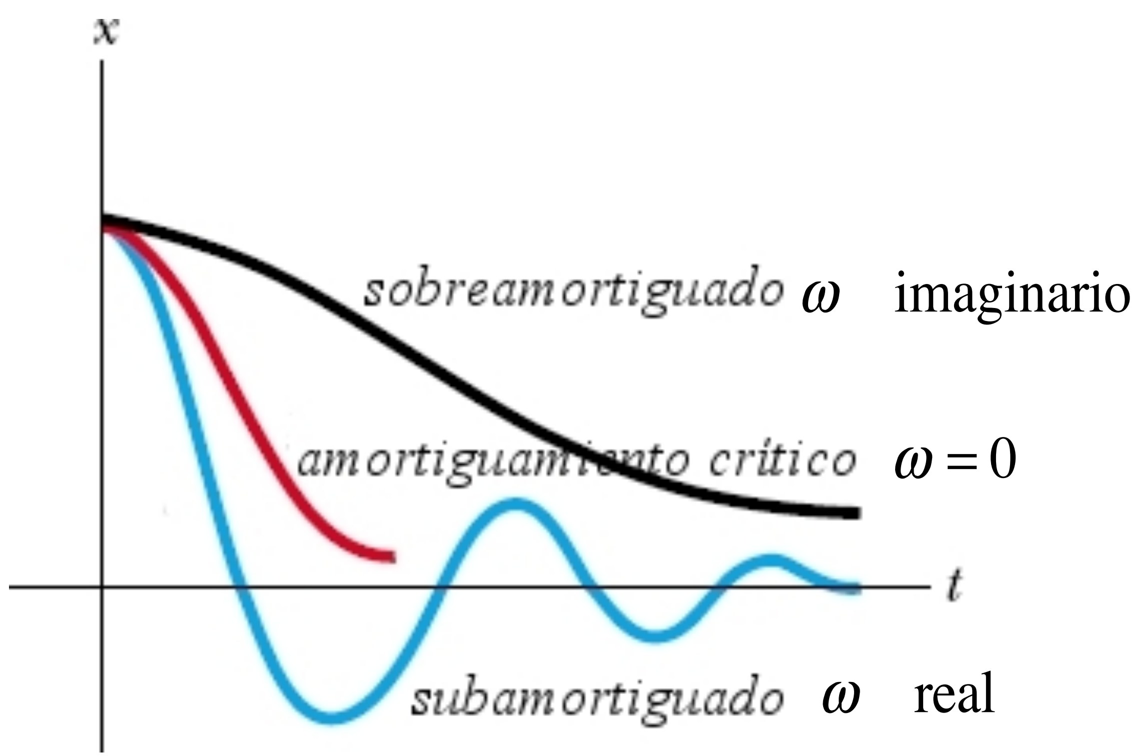


$$x(t) = A_0\, e^{-\frac{bt}{2m}} \cos(\omega t + \delta)$$

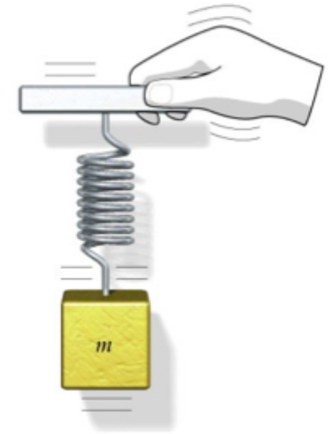
- La frecuencia angular está dada por

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$$





Oscilaciones Forzadas



- Para compensar la pérdida de energía en un sistema amortiguado puede aplicarse una fuerza periódica externa que haga trabajo positivo en el sistema.

- Pensemos en un sistema formado por un oscilador amortiguado sujeto a una fuerza externa que varía armónicamente con el tiempo con frecuencia ω:

$$\vec{F}_{ext} = \vec{F}_0 \cos(\omega t)$$

- La ecuación de Newton aplicada al sistema:

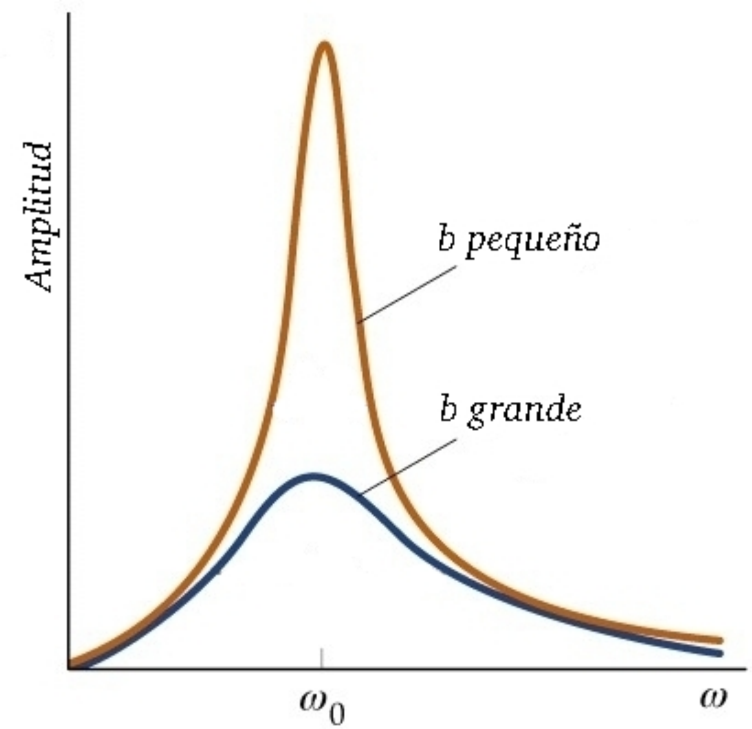
$$-m\omega_0^2 x - b\mathrm{v} + \mathrm{F}_0 \cos(\omega t) \;=\; m\,a$$

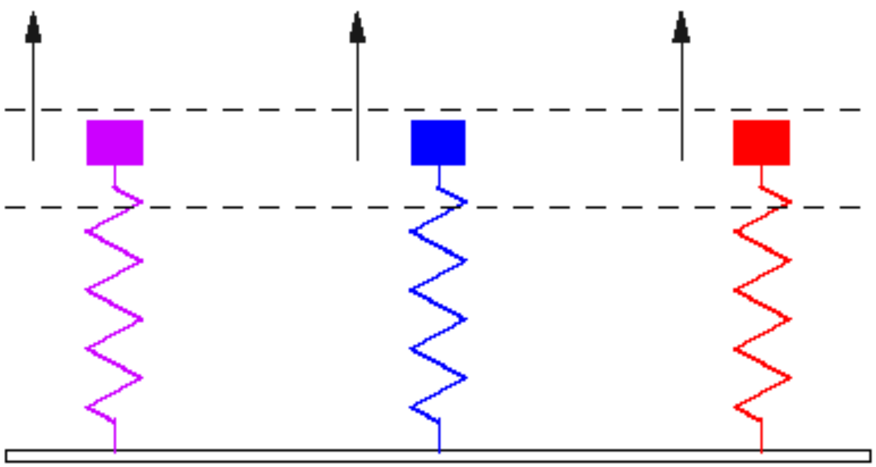
- La solución de esta ecuación es

$$x(t) = x_s \cos(\omega t + \delta)$$

$$x_s = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2) + b^2\omega^2}}$$

$$\tan\delta = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$





Puente de tacoma, 1940

$$x_s = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2) + b^2\omega^2}}$$

$$\underset{b \to 0}{\approx} \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)}}$$

Para b -> 0, la amplitud se vuelve muy grande cuando $\omega = \omega_0$

RESONANCIA