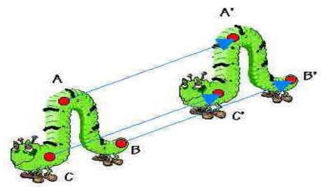
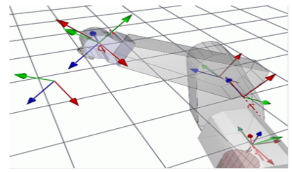
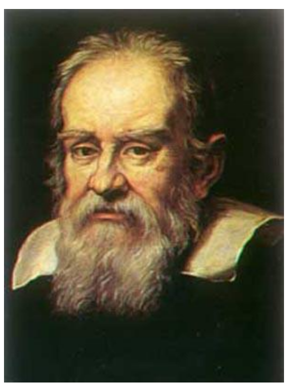
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE FISICA

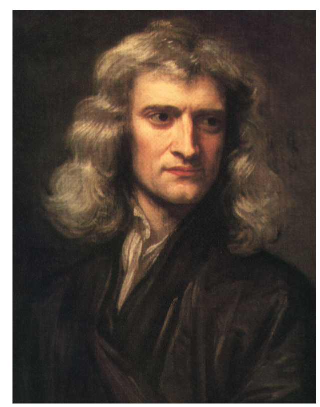
FISICA GENERAL FIS1503





Dr. José Mejía López
Física Teórica, segundo piso
Anexo 7149
jmejia@puc.cl

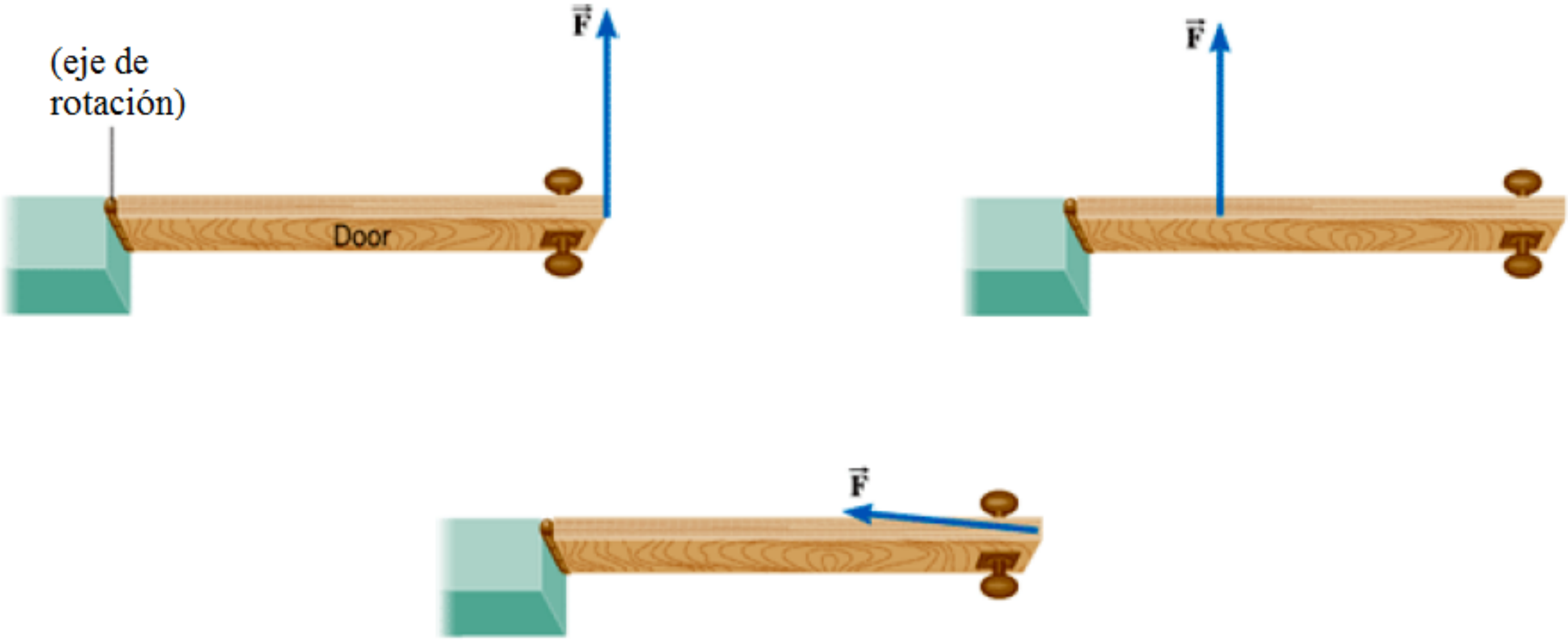




Capítulo 5

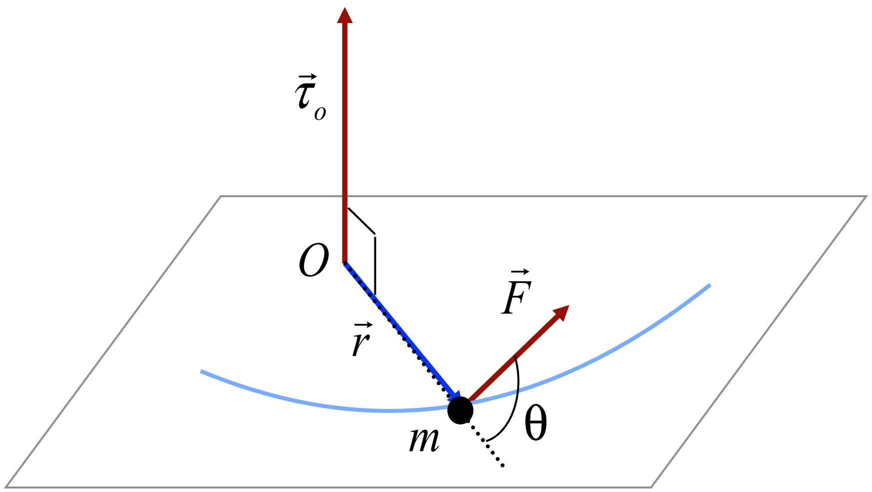
Dinámica de sólidos rígidos

¿De qué depende el movimiento rotacional de un sólido?



Las rotaciones dependen no solo de la Fuerza sino también del punto de aplicación de ésta.

Torque o Momento de una Fuerza



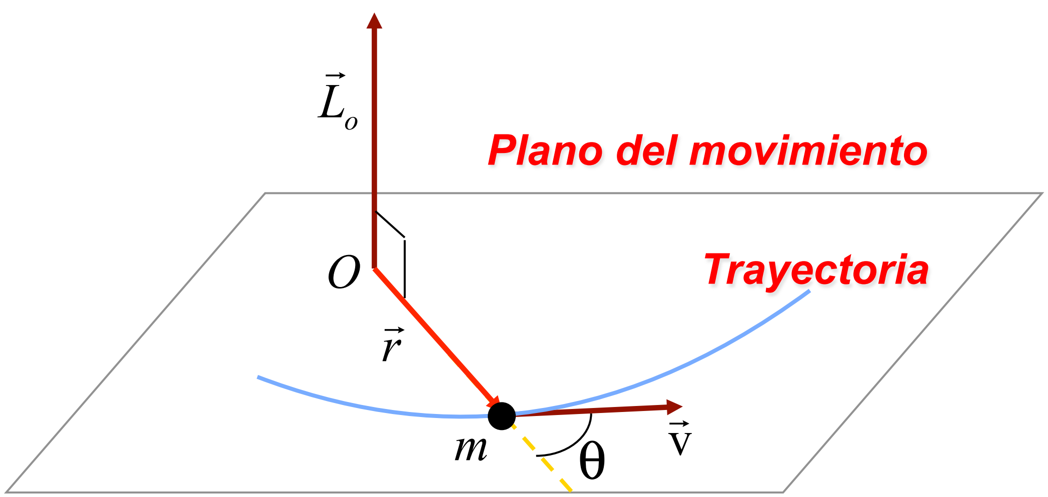
Se define como

$$\vec{\tau}_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

Su módulo es igual a

$$\tau_o = \left|\vec{\tau}_o\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = rF \operatorname{sen}\theta$$
$$= rF_\perp$$
$$= Fr_\perp$$

Momento Angular



Se define como

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p}$$

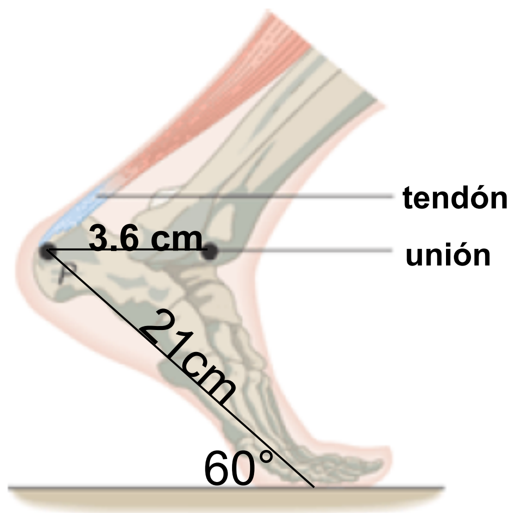
$$\Rightarrow \quad \vec{L}_o = \vec{r} \times m\vec{\mathrm{v}} = m\vec{r} \times \vec{\mathrm{v}}$$

Su módulo es igual a

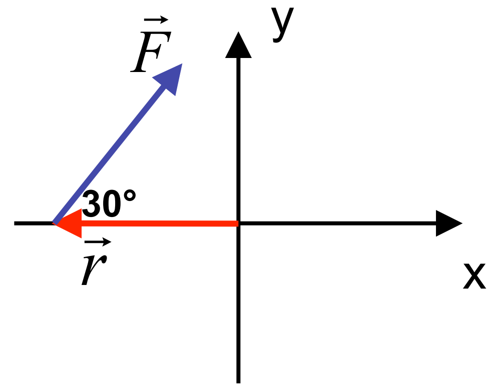
$$L_o = \left|\vec{L}_o\right| = \left|\vec{r} \times m\,\vec{\mathrm{v}}\right| = m\,r\,\mathrm{v}\operatorname{sen}\theta$$

Ejemplo

Calcular el torque que hace el tendón de aquiles (720 N) con respecto a la unión del tobillo y con respecto al punto de contacto del pie en el suelo.



Para la unión:



$$\vec{\tau}_u = -xF_y\,\hat{k}$$

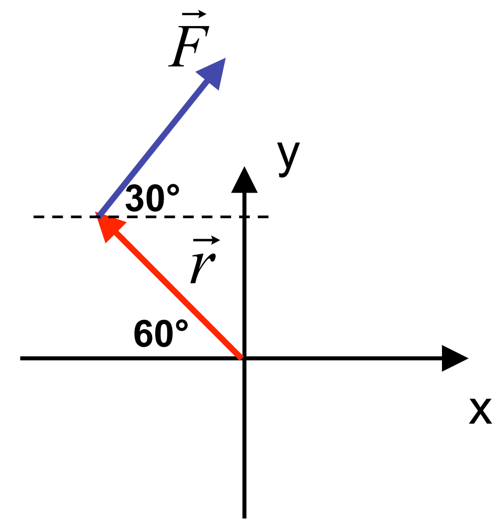
$$\vec{\tau}_u = -(0.036)(720\,\mathrm{sen}\,30)\,\hat{k}\ \mathrm{Nm}$$

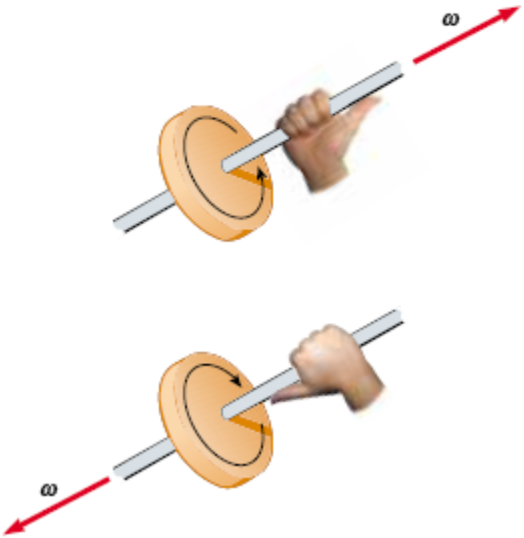
$$\vec{\tau}_u = -(12.96\ \mathrm{Nm})\,\hat{\mathrm{k}}$$

Para el punto de contacto:

$$\tau_c = rF\,\mathrm{sen}\,90 = (0.21)(720) = 151.2\ \mathrm{Nm}$$

$$\vec{\tau}_c = -(151.2\ \mathrm{Nm})\,\hat{\mathrm{k}}$$



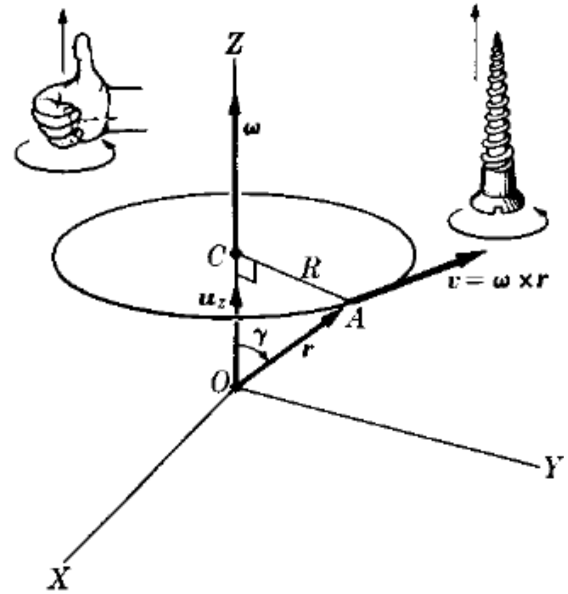


$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_o = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= m\left[r^2\vec{\omega} - (\vec{r}\cdot\vec{\omega})\vec{r}\right]$$

$$\vec{L}_c = mR^2\vec{\omega}$$



Teorema del momento angular

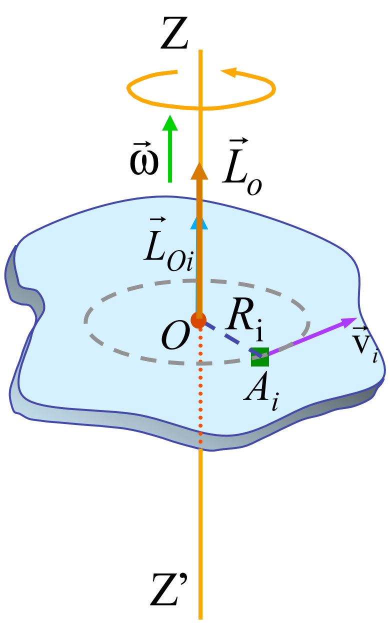
$$\frac{\Delta \vec{L}_o}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{r} \times \vec{p})}{\Delta t} = \vec{r} \times \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{\mathrm{v}} \times \vec{p} \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_o = \frac{\Delta \vec{L}_o}{\Delta t}$$

Conservación del momento angular

$$\frac{\Delta \vec{L}_o}{\Delta t} = \vec{\tau}_o = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_o = \overrightarrow{cte}$$

Momento angular y momento de inercia.

- Considérese una placa delgada sólida que rota alrededor de un eje de rotación fijo.



- El momento angular del elemento A_i de la placa respecto O es

$$\vec{L}_{Oi} = m_i R_i^2 \vec{\omega}$$

- El momento angular de toda la placa respecto al punto O es

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_{Oi} = \sum_i m_i R_i^2 \vec{\omega}$$

- Como la velocidad angular es la misma para todos los puntos del sólido

$$\vec{L}_O = \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \vec{\omega}$$

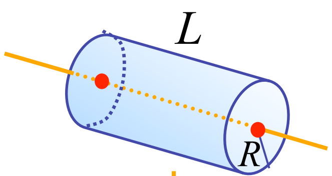
- Definimos el momento de inercia para el eje ZZ′ que pasa por O como

$$I = \sum_i m_i R_i^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\vec{L}_O = I\,\vec{\omega}}$$

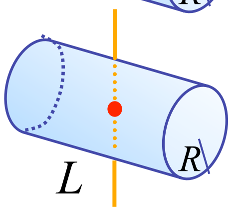
El momento angular tiene la misma dirección que la velocidad angular para un sólido.

Momento de inercia para diferentes sólidos

Cilindro

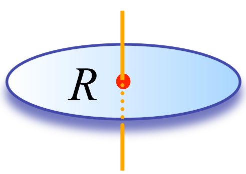


$$I_o = \frac{1}{2} MR^2$$

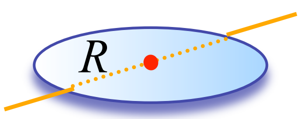


$$I_o = \frac{M}{12}\left(3R^2 + L^2\right)$$

Disco

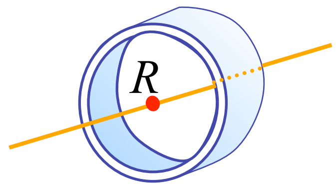


$$I_o = \frac{1}{2} MR^2$$



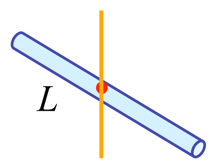
$$I_o = \frac{1}{4} MR^2$$

Cilindro hueco (Anillo)



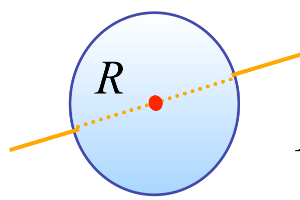
$$I_o = MR^2$$

Varilla delgada



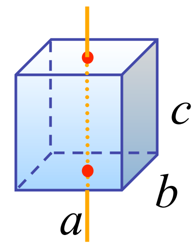
$$I_o = \frac{1}{12} ML^2$$

Esfera



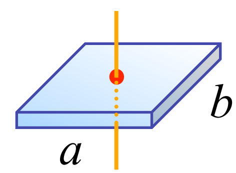
$$I_o = \frac{2}{5} MR^2$$

Paralelepípedo

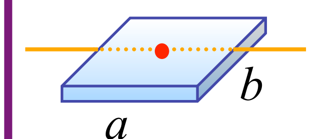


$$I_o = \frac{1}{12} M\left(a^2 + b^2\right)$$

Placa rectangular

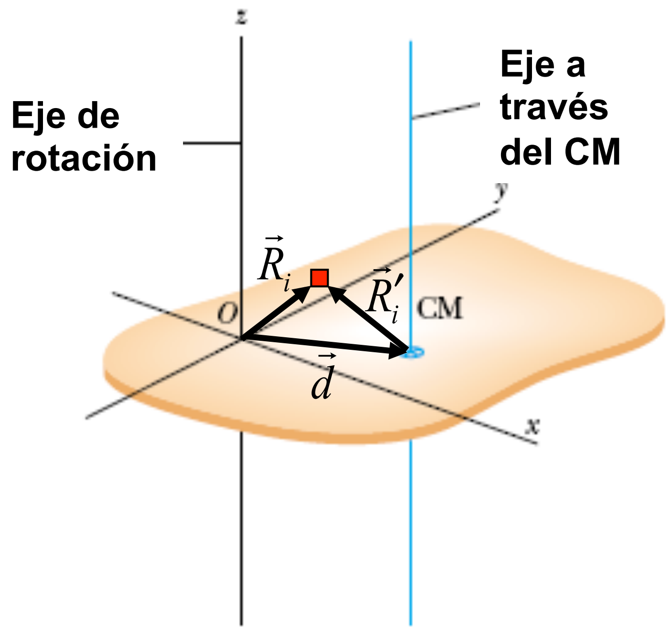


$$I_o = \frac{1}{12} M\left(a^2 + b^2\right)$$



$$I_o = \frac{1}{12} Mb^2$$

Teorema de Steiner o de los ejes paralelos



$$I_o = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (\vec{R}'_i + \vec{d})^2$$

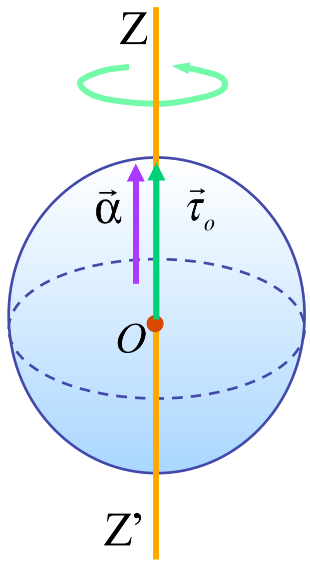
$$= \sum_i m_i R_i'^2 + 2\sum_i m_i \vec{R}'_i \cdot \vec{d} + \sum_i m_i d^2$$

$$= I_{CM} + 2\left(\overbrace{\sum_i m_i \vec{R}'_i}^{0}\right) \cdot \vec{d} + d^2 \sum_i m_i$$

$$\boxed{I_o = I_{CM} + Md^2}$$

Ecuación del movimiento para la rotación de un sólido rígido que gira en torno a un eje fijo:

$$\vec{\tau}_O^{\,ext} = \frac{\Delta \vec{L}_O}{\Delta t}$$



$$\vec{L}_O = I\vec{\omega}$$

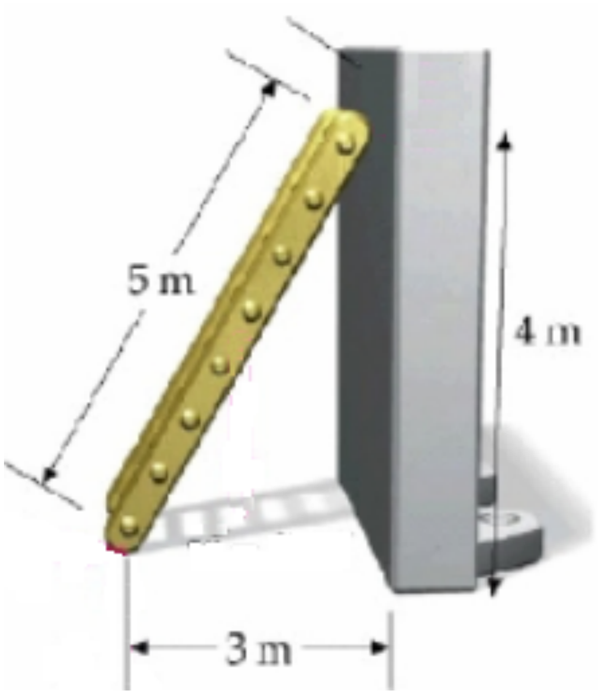
$$\vec{\tau}_O^{\,ext} = \frac{\Delta(I\vec{\omega})}{\Delta t} = I\,\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{\tau}_O^{\,ext} = I\vec{\alpha}}$$

Rotación en torno a un eje principal

Ejemplo

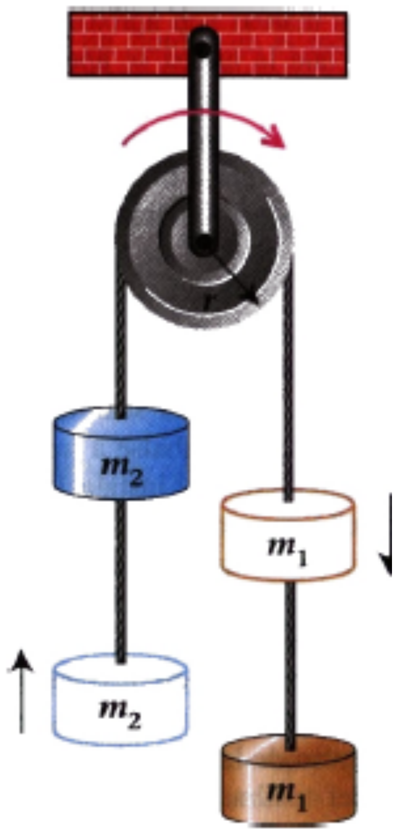
Una escalera de 5 m está apoyada sobre una pared sin roce. El extremo de la escalera que apoya en el piso está a 3 m de la pared. ¿Cuál es el mínimo coeficiente de roce estático necesario entre la escalera y el piso para que la escalera no resbale?



$$\mu = \frac{3}{8} = 0.375$$

Ejemplo

La máquina de Atwood de la figura consiste de una polea, de 0.4 kg que tiene un diámetro de 6 cm, y dos masas m_1 = 1.2 kg y m_2 = 1 kg. Calcular las aceleraciones de todos los objetos y la tensión de la cuerda.



$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_p} g = 0.75 \text{ m/s}^2$$

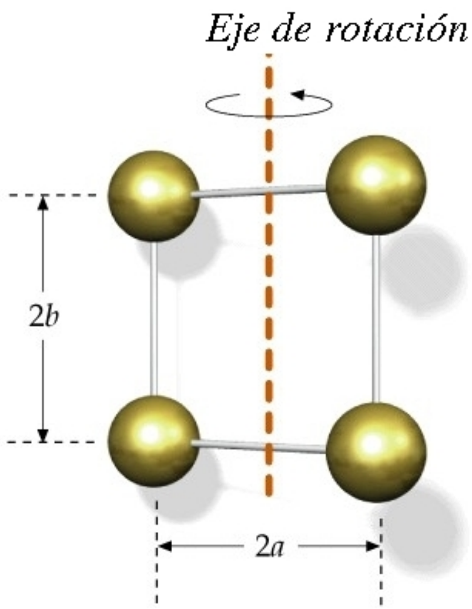
$$\alpha = 12.56 \text{ rad/s}^2$$

$$T_2 = 10.55 \text{ N}$$

$$T_1 = 10.86 \text{ N}$$

Ejemplo

Cuatro partículas de masa m = 1 kg están unidas por barras de masa despreciable formando un rectángulo de lados 2a = 6 cm y 2b = 12 cm que inicialmente está girando a 2 rad/s. Por efectos de rozamiento con el aire se detiene en t = 10 s. Calcular la magnitud de la fuerza media de la resistencia del aire sobre cada masa, suponiendo que siempre es perpendicular al plano que contiene las partículas.



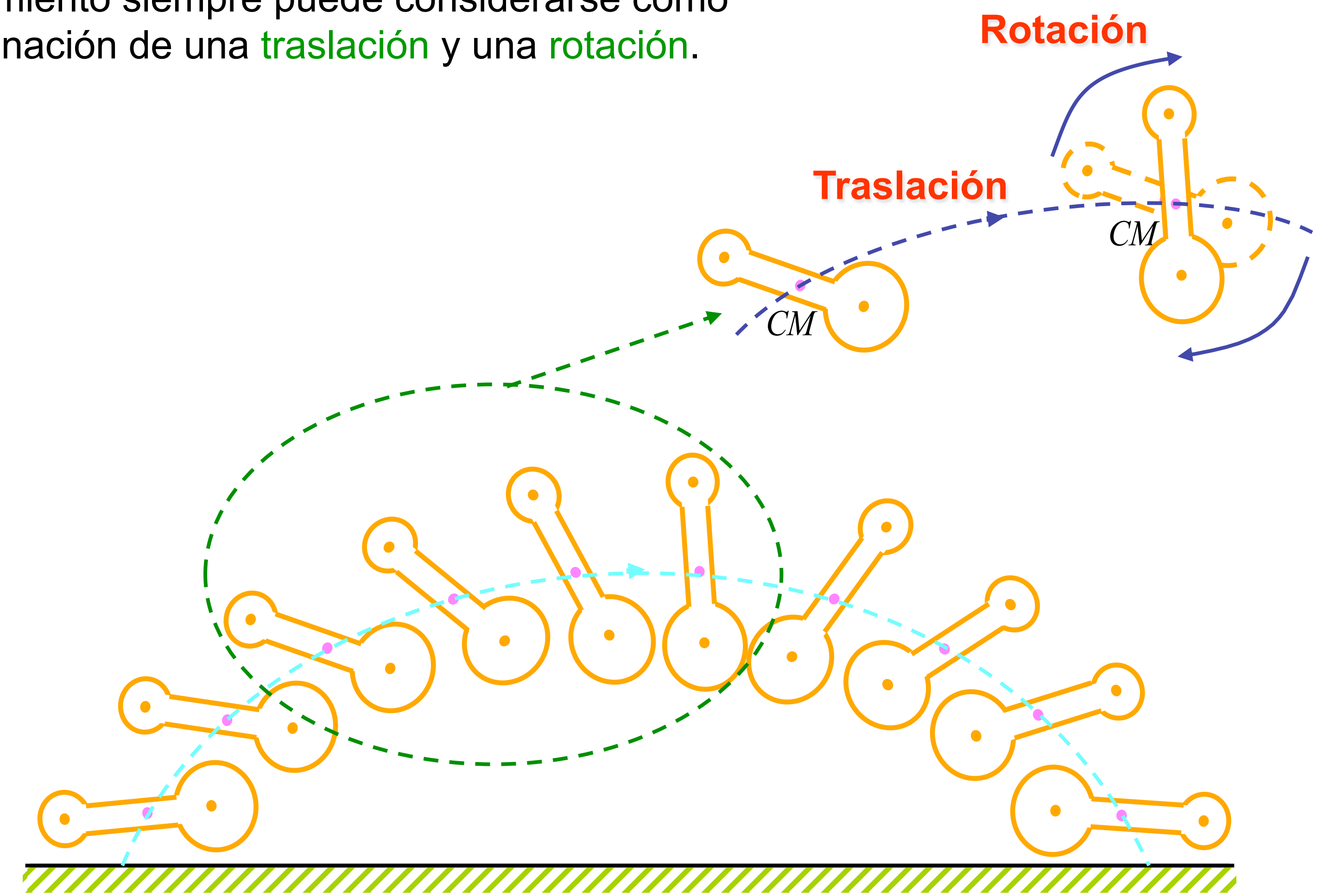
$$I = 4ma^2$$

$$\vec{\tau} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = -\frac{4ma^2}{t}\vec{\omega}_0$$

$$F = \frac{ma\omega_0}{t} = 6\times 10^{-8}\, N$$

- **Movimiento general**

Este movimiento siempre puede considerarse como una combinación de una traslación y una rotación.



•Ecuaciones del movimiento de traslación y rotación combinados de un sólido

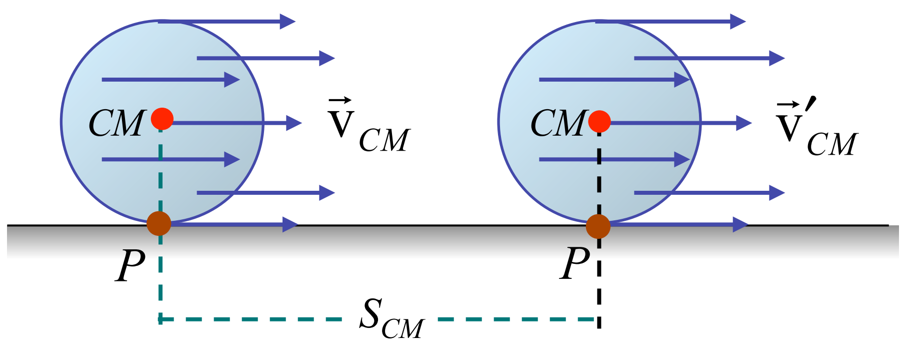
•Para un sólido rígido que se traslada y que gira alrededor de un eje que pasa por su CM, las ecuaciones del movimiento son

$$\vec{F}_{ext} = M\,\vec{a}_{CM}$$ Traslación

$$\vec{\tau}^{\,ext}_{CM} = I\vec{\alpha}$$ Rotación en torno a un eje que pasa por el CM

•Tipos de movimientos de un sólido rígido de forma cilíndrica que se mueve sobre una superficie plana

•El cilindro desliza



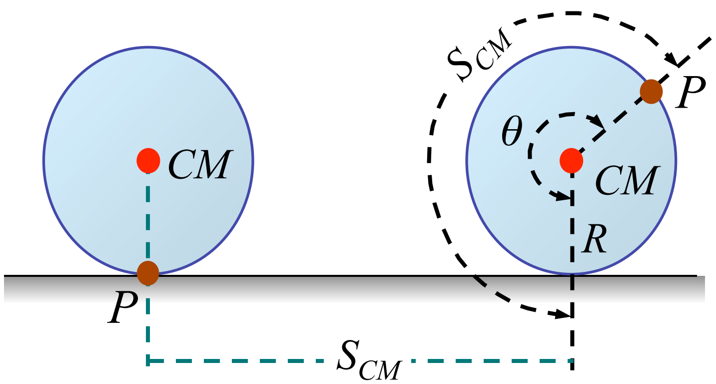
•El mismo punto del sólido permanece en todo momento en contacto con la superficie.

•El cilindro tiene un movimiento de traslación.

•Todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad para cualquier instante de tiempo.

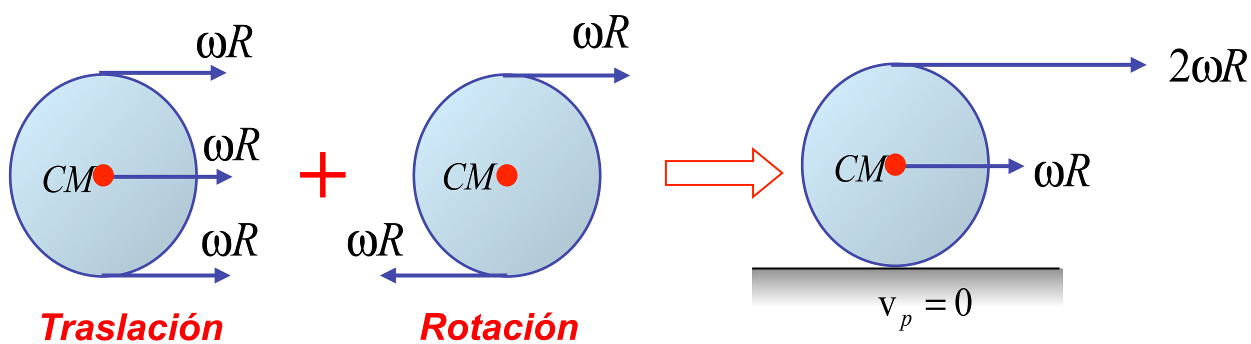
• *El cilindro rueda sin deslizar. Movimiento de rodadura.*

• Un punto distinto del sólido en cada instante permanece en contacto con la superficie.



$$s_{CM} = R\theta \Rightarrow v_{CM} = \omega R \Rightarrow a_{CM} = \alpha R$$

• ¿qué sucede con la velocidad lineal en la superficie del sólido?



• La velocidad del punto de contacto con la superficie es nula.

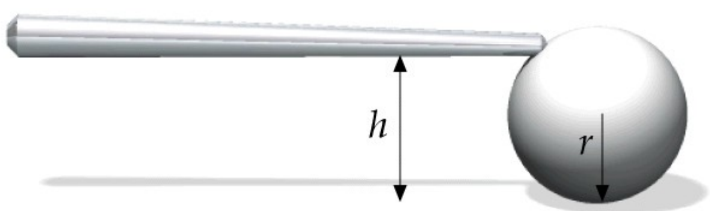
• Existe fuerza de rozamiento pero es estática.

Ejemplo

Un taco de billar golpea la bola horizontalmente a una altura h desde la mesa.

a) Determinar el valor de h para el cual la bola de billar rodará sin deslizamiento desde el comienzo.

b) Si la fuerza es F y es aplicada durante un tiempo t, ¿con qué rapidez sale disparada la bola? ¿Cuál es su velocidad angular en ese instante?



$$h = \frac{7}{5} r \qquad \omega = \frac{F\,t}{m\,r} \qquad \mathrm{v}_{CM} = \frac{F\,t}{m}$$

Energía cinética de un sistema de partículas.

- La energía cinética de un sistema de partículas (respecto un SRI o sistema L) se define

$$K = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \mathrm{v}_i^2 = \tfrac{1}{2} m_1 \mathrm{v}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \mathrm{v}_2^2 + \tfrac{1}{2} m_3 \mathrm{v}_3^2 + \ldots$$

- Teniendo en cuenta que el trabajo total lo podemos separar en el trabajo de las fuerzas externas y las internas, es posible expresar el trabajo total como

$$W = W_{ext} + W_{\mathrm{int}}$$

- Con lo cual el teorema del trabajo y la energía cinética para un sistema de partículas se expresa como

$$W_{ext} = \Delta K$$

- Se define la energía cinética interna como la energía cinética referida a un sistema de referencia situado en el CM o sistema C.

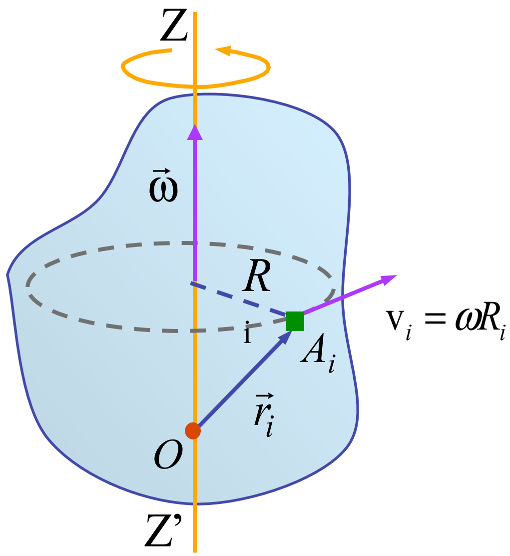
- La relación entre la energía cinética referida a un sistema C y un sistema L viene dada por:

$$K = K_{\mathrm{int}} + \tfrac{1}{2} M \mathrm{v}_{CM}^2$$

$$K = K_{\text{int}} + \tfrac{1}{2} M \mathrm{v}_{CM}^2$$

Energía cinética de un sólido rígido.

- Sea un sólido rígido que gira alrededor de un eje fijo.
- Como las partículas del sólido describen un movimiento circular alrededor del eje, su energía cinética será



$$K = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega^2$$

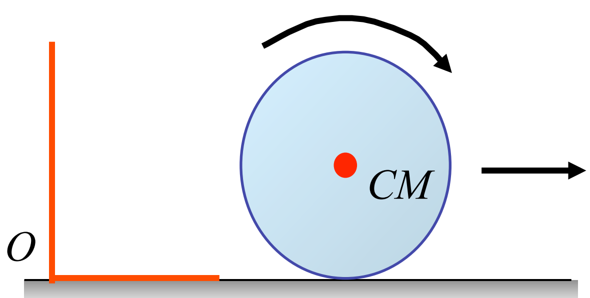
Como $I = \sum_i m_i R_i^2$

$$K = \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

Rotación en torno a un eje

Cualquier eje, no necesariamente eje principal

Sólido con movimiento de traslación y rotación

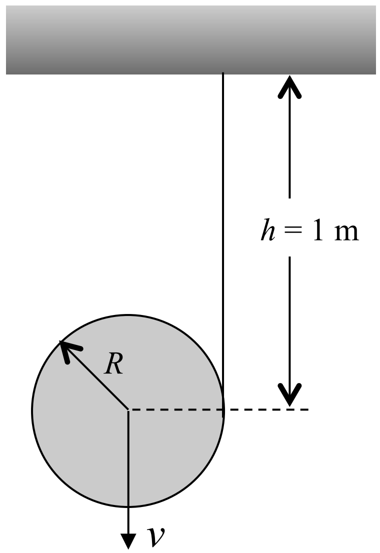


Como el único movimiento de las partículas respecto a un eje que pasa por el CM es de rotación, la energía cinética interna será de rotación y por tanto

$$K = K_{int} + \tfrac{1}{2} M v_{CM}^2 \quad \Rightarrow \quad K = \tfrac{1}{2} M v_{CM}^2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

Ejemplo

Un carrete cilíndrico de 10 cm de radio y 2 kg se desenrolla por efecto de la gravedad. Determine la velocidad de su CM después de que se haya desenrollado 1 m de cuerda (suponga que la cuerda no desliza a medida que el carrete baja).



Energía cinética total del carrete:

$$K = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

A medida que la cuerda se desenrolla se cumple $\mathrm{v} = \omega R$

$$K = \frac{1}{2}m(\omega R)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(mR^2 + I\right)\omega^2$$

Conservación de energía:

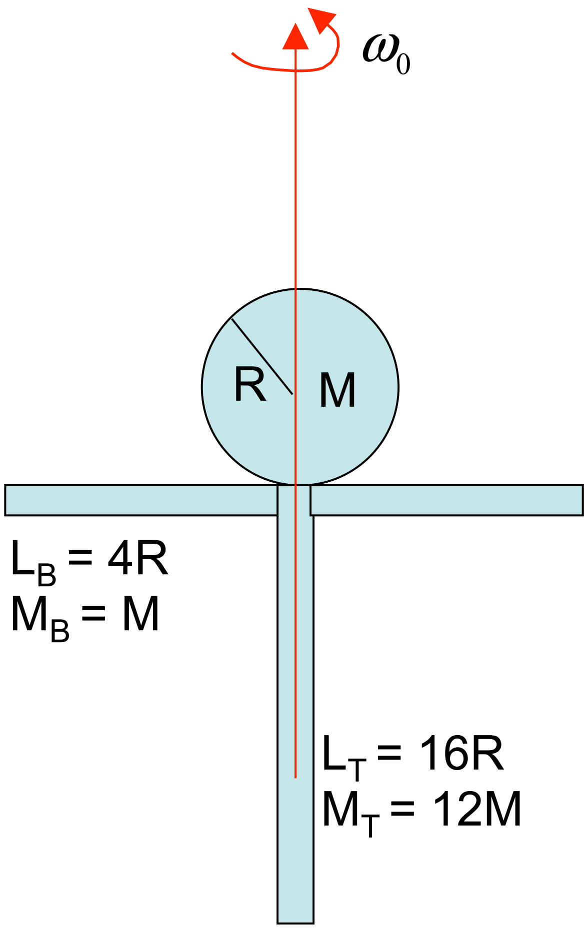
$$\frac{1}{2}\left(mR^2 + I\right)\omega^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2mgh}{mR^2 + I}}$$

$$\mathrm{v} = R\sqrt{\frac{2mgh}{mR^2 + I}} = \sqrt{\frac{2mghR^2}{(3/2)mR^2}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 3.61\,\mathrm{m/s}$$

Carrete cilíndrico $I = \frac{1}{2}mR^2$

Ejemplo

La bailarina simplificada del dibujo está girando con una velocidad angular ω_0, cuando disminuye la longitud de sus brazos a la mitad. ¿Cuál es su velocidad final? ¿Se conserva la energía?



$$I_0 = \frac{2}{5}MR^2 + 2\frac{1}{3}M_B L_B^2 = \frac{2}{5}MR^2 + \frac{1}{3}2M(4R)^2 = \frac{166}{15}MR^2$$

$$I_f = \frac{2}{5}MR^2 + 2\frac{1}{3}M_B L_{fB}^2 = \frac{2}{5}MR^2 + \frac{1}{3}2M(2R)^2 = \frac{46}{15}MR^2$$

$$L_i = L_f \quad \Rightarrow \quad I_0\omega_0 = I_f\omega_f$$

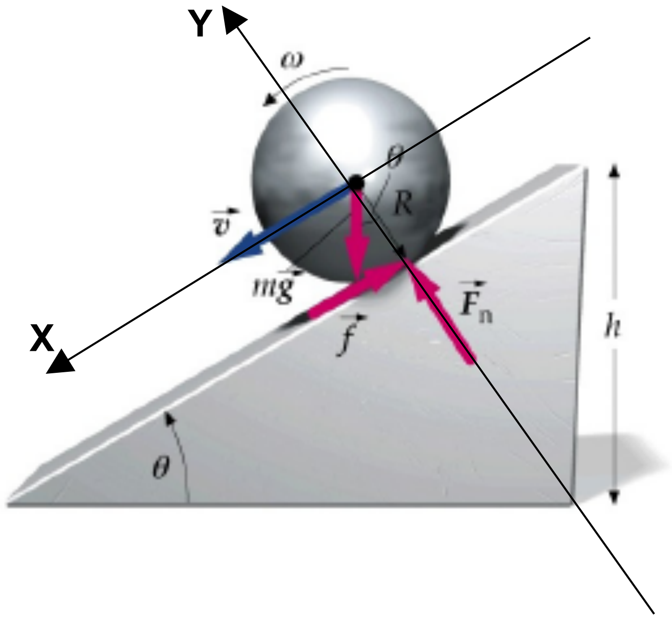
$$\frac{166}{15}MR^2\omega_0 = \frac{46}{15}MR^2\omega_f$$

$$166\omega_0 = 46\omega_f \quad \Rightarrow \quad \omega_f = \frac{166}{46}\omega_0 = 3.61\omega_0$$

$$\frac{\Delta K}{K_0} = \frac{\frac{1}{2}I_f\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_0\omega_0^2}{\frac{1}{2}I_0\omega_0^2} = \frac{\frac{1}{2}I_0\omega_0\left(\omega_f - \omega_0\right)}{\frac{1}{2}I_0\omega_0^2} = \frac{\omega_f - \omega_0}{\omega_0} = \frac{120}{46} = 2.61$$

Ejemplo

Una pelota sólido de masa m y radio R rueda sin deslizar hacia abajo por un plano inclinado en un ángulo θ. Encontrar la aceleración del centro de masa y la velocidad del centro de masa al final del plano.



$$mg\,\mathrm{sen}\,\theta - f = ma_{CM}$$

$$\tau = f\,R = I_{CM}\alpha = \frac{2}{5}mR^2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{2}{5}mR\frac{a_{CM}}{R} = \frac{2}{5}ma_{CM}$$

$$mg\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{2}{5}ma_{CM} = ma_{CM}$$

$$\Rightarrow \quad a_{CM} = \frac{5}{7}g\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$E_i = E_f$$

$$mgh = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2}bmR^2\frac{\mathrm{v}_{CM}^2}{R^2} = \frac{1}{2}m(1+b)\mathrm{v}_{CM}^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{v}_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1+b}} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$