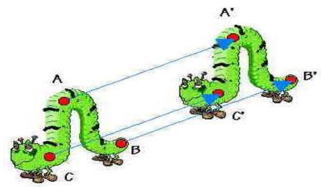
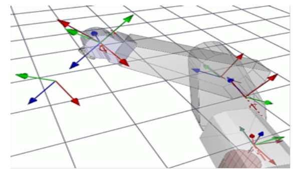
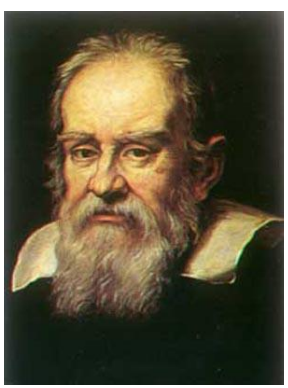
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE FISICA

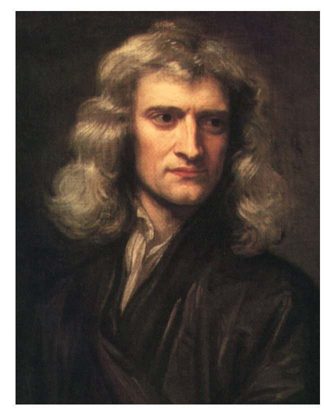
FISICA GENERAL FIS1503





Dr. José Mejía López
Física Teórica, segundo piso
Anexo 7149
jmejia@puc.cl





Capítulo 4

Dinámica

Momento Lineal

Definición de la cantidad de movimiento

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{\mathrm{v}}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{\Delta\left(m\vec{\mathrm{v}}\right)}{\Delta t}$$

Puede haber cambio en *m* y en $\vec{\mathrm{v}}$

- Definimos una nueva cantidad física:

$$\vec{p} \equiv m\vec{\mathrm{v}}$$

Cantidad de movimiento o momento lineal

Entonces, la 2º Ley de Newton se rescribe como

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Si $\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{constante}$

si la fuerza externa neta sobre un objeto es cero, se conserva la cantidad de movimiento

Ejemplo

Un jugador de fútbol patea un penal. El pié del jugador y la pelota permanecen en contacto durante 5×10^{-3} s. Como resultado la pelota, de masa 0.8 kg, adquiere una velocidad de 100 km/h. ¿Cual es la fuerza media que ejerce el pié del jugador sobre la pelota?

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Pelota inicialmente en reposo: $p_0 = m\mathrm{v}_0 = 0$

Momento final: $p = m\mathrm{v} = (0.8\text{ kg})(27.78\text{ m/s}) = 22.22\text{ kgm/s}$

$$\Rightarrow \quad \Delta p = p - p_0 = 22.22\text{ kgm/s}$$

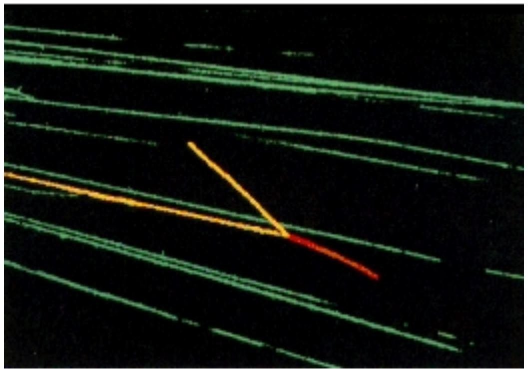
Ya que:

$$\Delta t = 5\times10^{3}\text{ s}$$

La fuerza media será: $F = \dfrac{22.22\text{ kgm/s}}{5\times10^{-3}\text{ s}} = 4444\text{ N}$

¡equivalente a sostener una masa de 444/9.8 ≈ 453.47 kg!

Colisiones

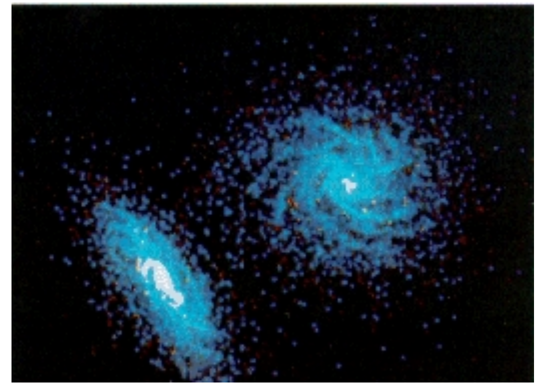


Colisión entre partícula *alfa* y núcleo de átomo de Sodio

$M \sim 10^{-26}$ kg
$L \sim 10^{-10}$ m

Colisión entre bolas de billar

$M \sim 10^{-1}$ kg
$L \sim 10^{-1}$ m



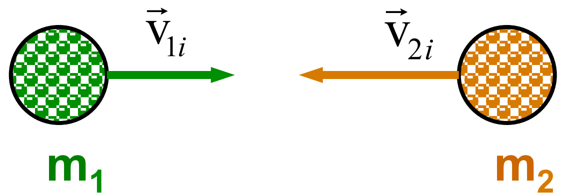
Colisión entre galaxias

$M \sim 10^{40}$ kg
$L \sim 10^{40}$ m

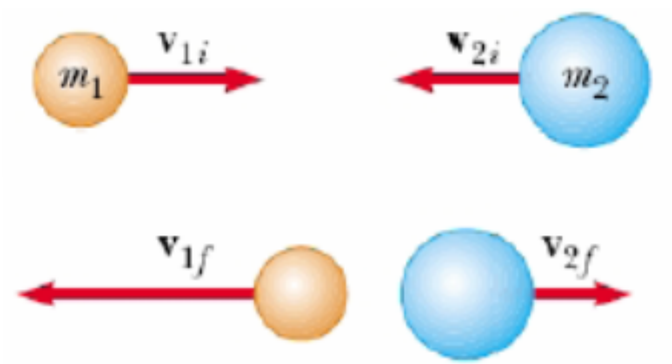
Las suposiciones básicas de una colisión:

1. La interacción es corta comparada al tiempo de observación.
2. Una fuerza relativamente grande actúa en cada partícula que colisiona.
3. El movimiento de uno o de las dos partículas cambian abruptamente después de la colisión (se puede hablar de un antes y después de la colisión

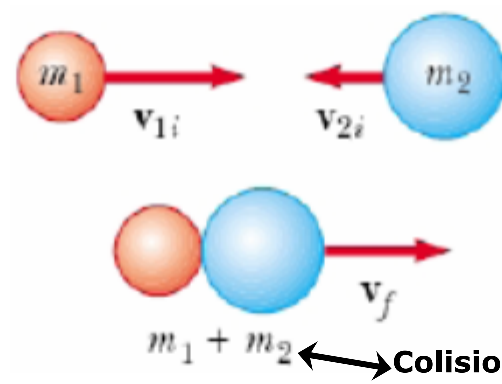
colisiones:



Colisiones elásticas



Colisiones inelásticas



Colisiones completamente inelásticas o plásticas

Se conserva el momentum lineal

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

Se conserva la energía mecánica

$$K_i = K_f$$

Se conserva el momentum lineal

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

No Se conserva la energía mecánica

$$K_i = K_f + E_{disipada}$$

EJEMPLO

Dos bolas de billar de igual masa colisionan con velocidades de 2 m/s y 3 m/s. Calcular las velocidades finales.

$$\mathrm{v}_1 = 2\ \mathrm{m/s} \qquad \mathrm{v}_2 = 3\ \mathrm{m/s}$$

Conservación de momentum:

$$m_1 \mathrm{v}_{1i} + m_2 \mathrm{v}_{2i} = m_1 \mathrm{v}_{1f} + m_2 \mathrm{v}_{2f} \quad \Rightarrow \quad 2m - 3m = m\mathrm{v}_{1f} + m\mathrm{v}_{2f}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{v}_{1f} + \mathrm{v}_{2f} = -1$$

Conservación de energía:

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 \mathrm{v}_{1i}^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 \mathrm{v}_{2i}^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 \mathrm{v}_{1f}^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 \mathrm{v}_{2f}^2 \quad \Rightarrow \quad 4m + 9m = m\mathrm{v}_{1f}^2 + m\mathrm{v}_{2f}^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{v}_{1f}^2 + \mathrm{v}_{2f}^2 = 13$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

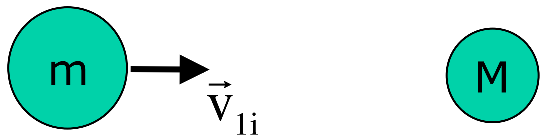
$$\mathrm{v}_{1f} = -1 - \mathrm{v}_{2f} \quad \Rightarrow \quad 1 + 2\mathrm{v}_{2f} + \mathrm{v}_{2f}^2 + \mathrm{v}_{2f}^2 = 13 \quad \Rightarrow \quad 2\mathrm{v}_{2f}^2 + 2\mathrm{v}_{2f} - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{v}_{2f} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{4} = \frac{-2 \pm 10}{4} = \begin{cases} 2\ \mathrm{m/s} \\ \cancel{-3\ \mathrm{m/s}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_{1f} = \begin{cases} -3\ \mathrm{m/s} \\ \cancel{2\ \mathrm{m/s}} \end{cases}$$

se invierten las velocidades

EJEMPLO

Un objeto de masa m y con rapidez inicial v_{1i} choca contra otro de masa M inicialmente en reposo. a) Calcular las velocidades finales , b) suponer M>>m, y c) suponer M<<m



$\vec{v}_{2i} = 0$

Conservación de momentum:

$$m v_{1i} = m v_{1f} + M v_{2f}$$

Conservación de energía:

$$m v_{1i}^2 = m v_{1f}^2 + M v_{2f}^2$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

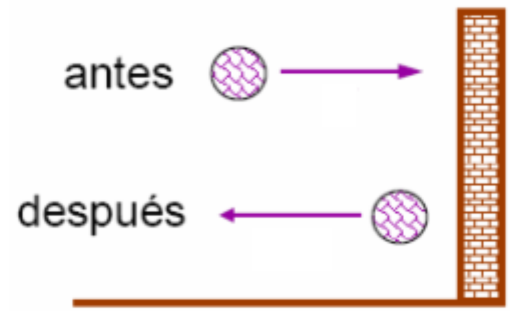
$$v_{1f} = v_{1i} - \frac{M}{m} v_{2f} \quad \Rightarrow \quad \cancel{m} v_{1i}^2 = m\left(\cancel{v_{1i}^2} - 2\frac{M}{m} v_{1i} v_{2f} + \frac{M^2}{m^2} v_{2f}^2 \right) + M v_{2f}^2$$

$$-2M v_{1i} v_{2f} + \frac{M^2}{m} v_{2f}^2 + M v_{2f}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 v_{1i} + \frac{M}{m} v_{2f} + v_{2f} = 0$$

$$v_{2f} = \frac{2m}{m+M} v_{1i} \quad \Rightarrow \quad v_{1f} = \frac{m-M}{M+m} v_{1i}$$

a) M >> m

$$v_{2f} = \frac{2m}{m+M} v_{1i} \qquad v_{1f} = \frac{m-M}{M+m} v_{1i}$$



Si $M \to \infty$

$$v_{2f} = 0$$

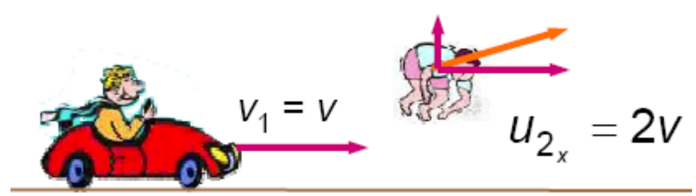
$$v_{1f} = -v_{1i}$$

b) M << m

Si $M \to 0$

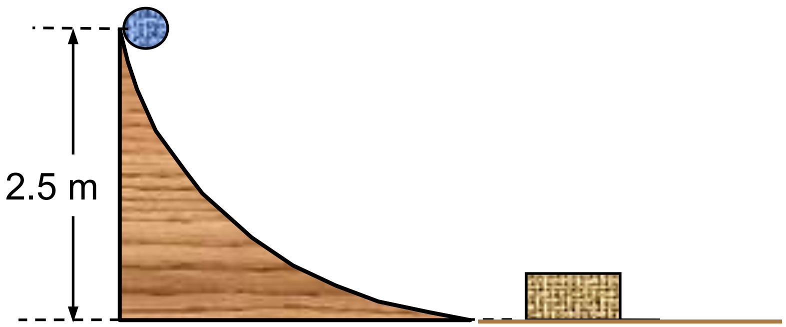
$$v_{2f} = 2v_{1i}$$

$$v_{1f} = v_{1i}$$



EJEMPLO

Una bola de masa 2 kg baja por una rampa de 2.5 m de altura sin experimentar roce. En el extremo inferior de la rampa experimenta una colisión elástica con una caja de masa 5.0 kg, que se encuentra en reposo. a) ¿Cual será la velocidad de la caja inmediatamente después de la colisión? b) ¿Que ocurre con la bola después de la colisión?



a) conservación de la energía mecánica

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\cancel{m_b} gh = \tfrac{1}{2} \cancel{m_b} \mathrm{v}_b^2 \quad \Rightarrow \quad 2gh = \mathrm{v}_b^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{v}_b = \sqrt{2gh} = 7 \text{ m/s}$$

Durante la Colisión :

$$m_b \mathrm{v}_b = m_b \mathrm{v}_{bf} + m_c \mathrm{v}_{cf} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_{bf} = \mathrm{v}_b - \frac{m_c}{m_b}\mathrm{v}_{cf} = 7 - 2.5\mathrm{v}_{cf}$$

$$m_b \mathrm{v}_b^2 = m_b \mathrm{v}_{bf}^2 + m_c \mathrm{v}_{cf}^2 \quad \Rightarrow \quad 2(49) = 2(49 - 35\mathrm{v}_{cf} + 6.25\mathrm{v}_{cf}^2) + 5\mathrm{v}_{cf}^2$$

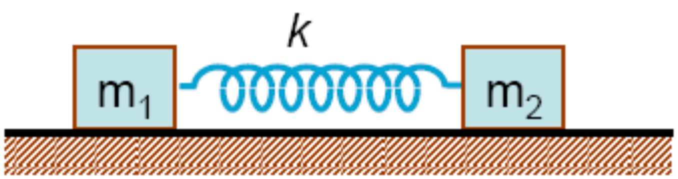
$$0 = -70\mathrm{v}_{cf} + 17.5\mathrm{v}_{cf}^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_{cf} = \frac{70}{17.5} = 4 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_{bf} = -3 \text{ m/s}$$

b) Luego de la colisión, la bola sube por la rampa, con rapidez inicial de 3 m/s, entonces

$$K_i + U_i = K_f + U_f \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2} m_b \mathrm{v}_{bf}^2 = m_b g h' \quad \Rightarrow \quad h' = \frac{\mathrm{v}_{bf}^2}{2g} = 0.46 \text{ m}$$

EJEMPLO

Dos masas, de 2 kg y 3 kg, están unidas por un resorte de constante elástica 120 N/m y descansan sobre una superficie sin roce. Inicialmente el sistema está en reposo y el resorte está comprimido una distancia de 5 cm. Si el sistema es liberado, ¿con qué velocidad se mueven las masas?



Se conserva el momentum lineal:

$$p_i = p_f \quad \Rightarrow \quad 0 = m_1 \mathrm{v}_1 + m_2 \mathrm{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \mathrm{v}_2$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{v}_1 = -1.5 \mathrm{v}_2$$

Se conserva la energía:

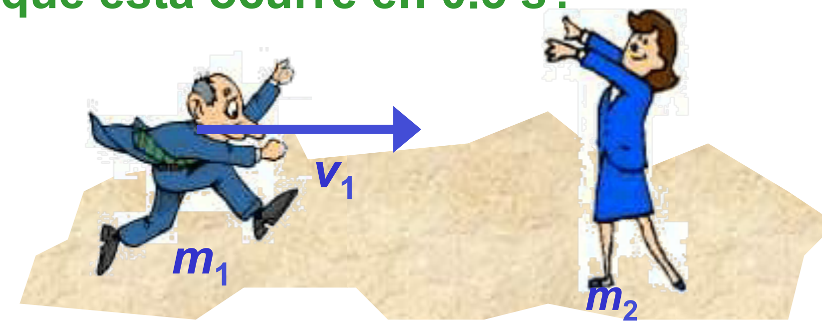
$$K_i + U_i = K_f + U_f \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2} k x^2 = \tfrac{1}{2} m_1 \mathrm{v}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \mathrm{v}_2^2 \quad \Rightarrow \quad 0.3 = 2(-1.5 \mathrm{v}_2)^2 + 3 \mathrm{v}_2^2$$

$$\Rightarrow \quad 7.5 \mathrm{v}_2^2 = 0.3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_2 = 0.2 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{v}_1 = -0.3 \text{ m/s}$$

EJEMPLO

Una persona cuya masa es 65 kg y que se encuentra en reposo, es impactada por otra de masa 80 kg, que se mueve a 0.6 m/s. Si luego de la colisión ambas personas permanecen unidas (abrazadas), a) ¿Con qué velocidad se mueven luego de la colisión? b) ¿Cuánta energía se gasta en el abrazo? c) ¿Cual es la potencia disipada en la colisión, suponiendo que ésta ocurre en 0.3 s?



a) $$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)}$$

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 0.331\, m/s$$

b) El cambio de energía es $\Delta K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta K = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2$

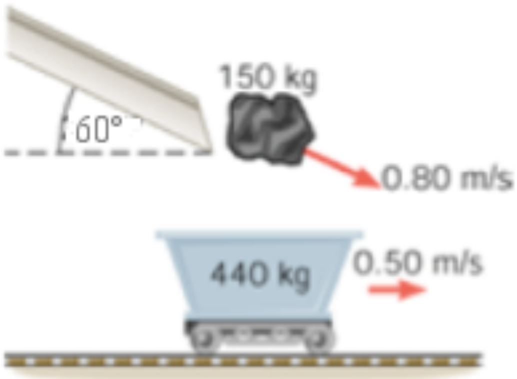
Por lo que la energía gastada es $\Delta K = \frac{65 \cdot 80}{2(65 + 80)} 0.6^2\, J = 6.4552\, J$

c) La potencia está dada por la energía cinética perdida por unidad de tiempo

$$P = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{6.4552\, J}{0.3\, s} = 21.52\, W$$

EJEMPLO

Un carro de mina (masa = 440 kg) rueda con una rapidez de 50 cm/s sobre una vía horizontal, como se muestra en la figura. Una piedra de 150 kg tiene una rapidez de 80 cm/s cuando deja la rampa. Determine la velocidad del sistema carro/piedra después de que la piedra ha llegado al reposo en el carro.



$$P_{ix} = P_{fx}$$

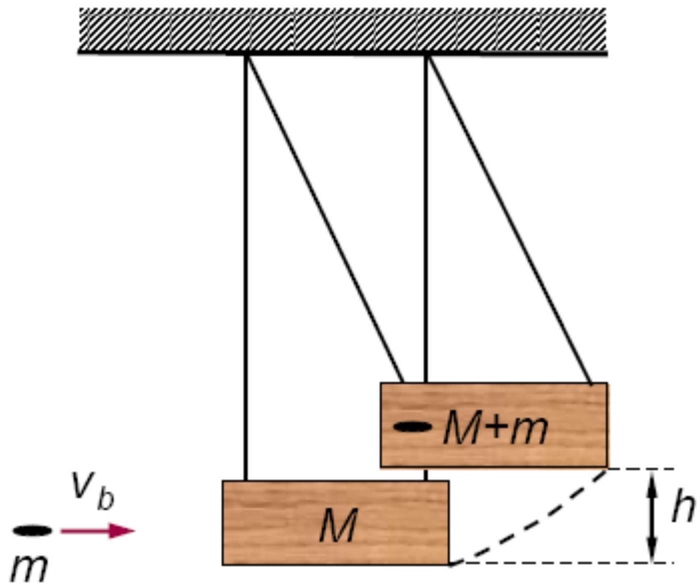
$$m_c \mathrm{v}_{ic} + m_p \mathrm{v}_{ip} \cos 60° = (m_c + m_p)\mathrm{v}_f$$

$$\mathrm{v}_f = \frac{m_c \mathrm{v}_{ic} + \frac{1}{2} m_p \mathrm{v}_{ip}}{m_c + m_p}$$

$$\mathrm{v}_f = 0.47 \text{ m/s} = 47 \text{ cm/s}$$

Péndulo Balístico

¿cómo medir la velocidad de un proyectil?



Conservación de momentum

$$m\mathrm{v}_b = (m+M)\mathrm{v}_c \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_b = \frac{m+M}{m}\mathrm{v}_c$$

Conservación de energía

$$\frac{1}{2}(m+M)\mathrm{v}_c^2 = (m+M)gh \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_c = \sqrt{2gh}$$

$$\mathrm{v}_b = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$$

¿Cuánta energía se pierde?

$$\Delta E = (m+M)gh - \frac{1}{2}m\frac{(m+M)^2}{m^2}2gh = \left(1-\frac{m+M}{m}\right)(m+M)gh = \left(-\frac{M}{m}\right)(m+M)gh$$

m = 5 g
M = 2 kg
h = 3 cm

$$\mathrm{v}_b = 307.5 \text{ m/s} \qquad \Delta E = -235.79 \text{ J}$$

EJEMPLO

Una bala de masa m_b, es disparada sobre un bloque de masa m_c que se encuentra en reposo sobre una pista sin rozamiento que tiene un loop circular de radio R. ¿Cuál es la rapidez mínima que debe tener la bala para que el bloque complete el loop?

$$P_i = P_f$$

$$m_b \mathrm{v}_b = (m_c + m_p)\mathrm{v}_f = M\mathrm{v}_f$$

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{2}M\mathrm{v}_1^2 = Mg(2R) + \frac{1}{2}M\mathrm{v}_2^2 \quad \Rightarrow \quad M\left(\frac{m_b}{M}\mathrm{v}_b\right)^2 = 4MgR + M\mathrm{v}_2^2$$

Para encontrar el mínimo, la normal debe ser cero en el punto 2

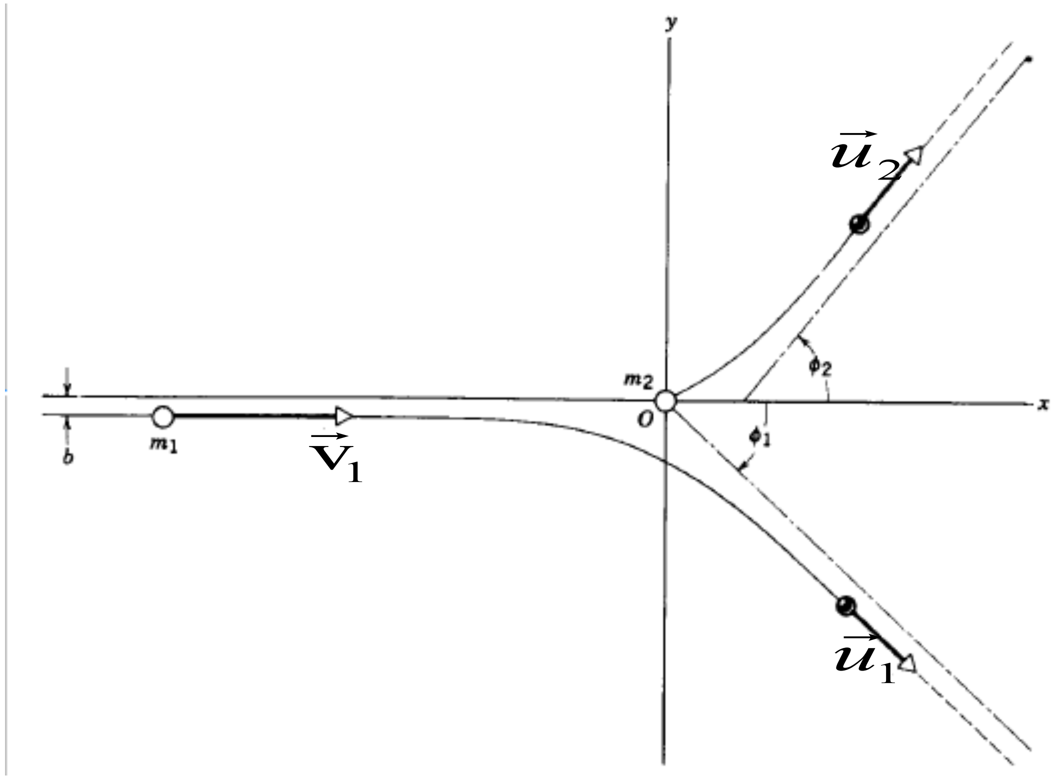
$$M\frac{\mathrm{v}_2^2}{R} = Mg \quad \Rightarrow \quad M\mathrm{v}_2^2 = MgR$$

Por lo tanto

$$m_b^2\mathrm{v}_b^2 = 4M^2gR + M^2gR \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_b^2 = \frac{5M^2gR}{m_b^2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{v}_b = \sqrt{5gR}\,\frac{M}{m_b} = \sqrt{5gR}\,\frac{m_b + m_c}{m_b}$$

Colisiones elásticas en dos dimensiones

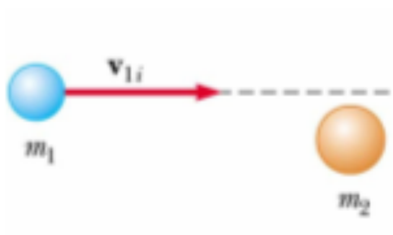


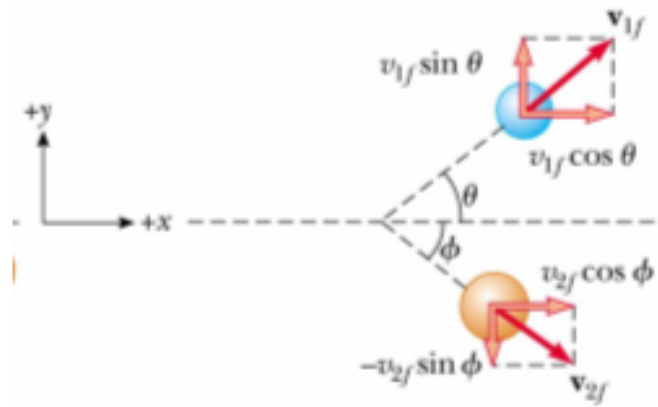
$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 \quad \Rightarrow \quad m_1 v_1^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m_1 v_1 = m_1 u_1 \cos\phi_1 + m_2 u_2 \cos\phi_2 \\ 0 = m_1 u_1 \operatorname{sen}\phi_1 + m_2 u_2 \operatorname{sen}\phi_2 \end{cases}$$

EJEMPLO

Una partícula de masa m_1 que se mueve con rapidez 5 m/s, colisiona con otra de masa igual pero en reposo. Si después de la colisión m_1 se mueve en una dirección de 60° con respecto a la dirección de movimiento inicial, encontrar las velocidades finales.





$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\cos 60^\circ + m_2 v_{2f}\cos\phi \\ 0 = m_1 v_{1f}\sin 60^\circ - m_2 v_{2f}\sin\phi \\ m_1 v_{1i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

$$v_{2f}\cos\phi = v_{1i} - v_{1f}\cos 60^\circ$$
$$v_{2f}\sin\phi = v_{1f}\sin 60^\circ$$

$$v_{2f}^2 = v_{1i}^2 + v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f}\cos 60^\circ$$
$$v_{2f}^2 = v_{1i}^2 - v_{1f}^2$$

$$0 = 2v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f}\cos 60^\circ$$

$$\cancel{v_{1f} = 0}$$

$$v_{1f} = v_{1i}\cos 60^\circ = 2.5\ \mathrm{m/s}$$

$$\Rightarrow \quad v_{2f} = v_{1i}\,\mathrm{sen}\,60^\circ = 4.33\ \mathrm{m/s}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{sen}\,\phi = \cos 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \phi = 30^\circ$$

Centro de masa

- ¿Qué es un sistema de partículas?

Modelo más complejo que el de la partícula. Considera los objetos como *agregados de partículas que interactúan*.

Se usa cuando el modelo de partícula no es adecuado y *considera las dimensiones del objeto* en estudio.

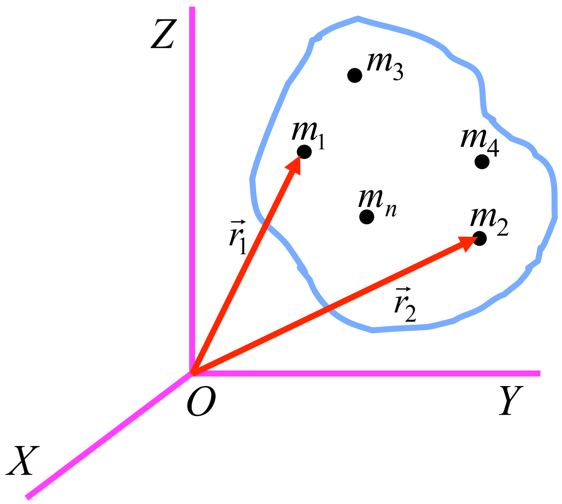
- **Clasificación de los sistemas de partículas.**

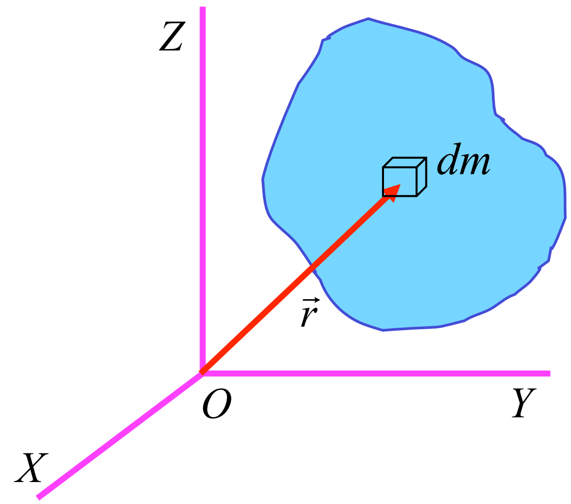
Discretos nº finito de partículas

Deformables	Rígidos
Cambia distancia	No cambia

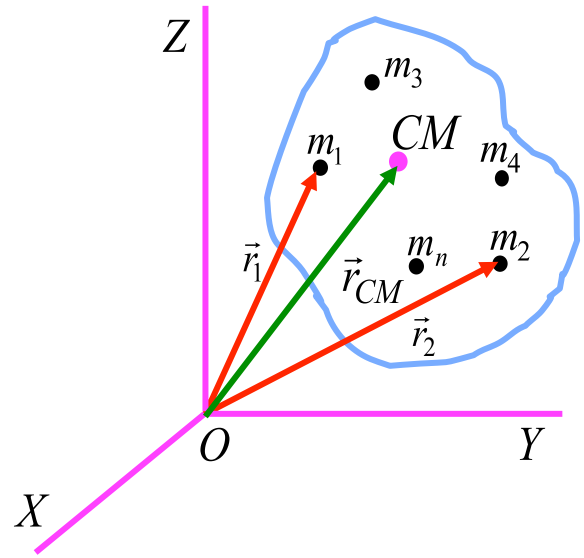
Continuos distribución continua de materia

Deformables	Rígidos
Cambia forma	No cambia





Para un sistema de partículas discreto el CM es un punto cuya posición, velocidad y aceleración vienen dadas por

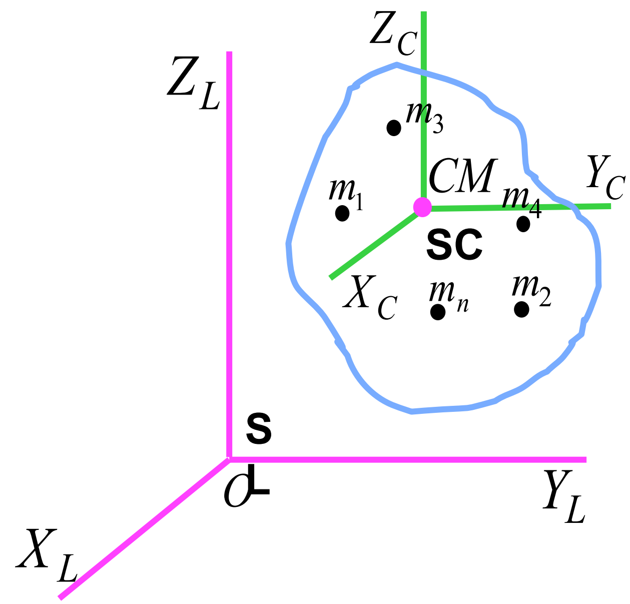


$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M}$$

$$\vec{\mathrm{v}}_{CM} = \frac{\Delta\vec{r}_{CM}}{\Delta t} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t} = \frac{\sum_i m_i\vec{\mathrm{v}}_i}{M}$$

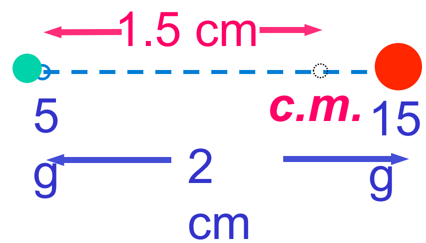
$$\vec{a}_{CM} = \frac{\Delta\vec{\mathrm{v}}_{CM}}{\Delta t} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{\Delta\vec{\mathrm{v}}_i}{\Delta t} = \frac{\sum_i m_i\vec{a}_i}{M}$$

Se puede colocar un sistema de referencia en el CM llamado *sistema C* (*SC*), distinto del sistema inercial donde se encuentra el observador que se llama *sistema laboratorio o sistema L* (*SL*).



EJEMPLO

Encuentre la posición del centro de masa del sistema formado por dos partí-culas de masas 5 g y 15 g, separadas 2 cm.



elegimos como sistema de referencia la posición de la partícula de masa 5 g

m_1 = 5 g, r_1 = 0

m_2 = 15 g, r_2 = 2 cm

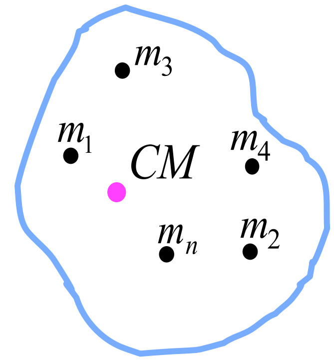
$$x_{cm} = \frac{5\,g \cdot 0\,cm + 15\,g \cdot 2\,cm}{5\,g + 15\,g}$$

$$x_{cm} = 1.5\,cm$$

Significado físico del centro de masa

- Supongamos que tenemos un sistema de partículas y calculemos la fuerza total sobre el sistema

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i \vec{a}_i = M \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M} = M\,\vec{a}_{CM}$$



El centro de masa se comporta como una partícula que sigue las leyes de Newton (leyes de la dinámica)

- Calculemos el momento lineal total del sistema

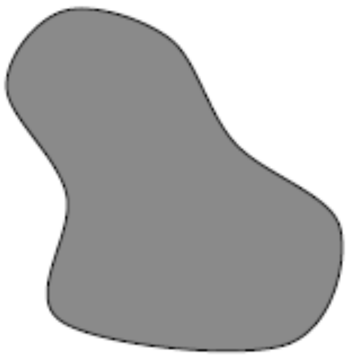
$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{\mathrm{v}}_i = M \frac{\sum_i m_i \vec{\mathrm{v}}_i}{M} = M\,\vec{\mathrm{v}}_{CM}$$

El centro de masa se comporta como una partícula que sigue las leyes de la cinemática

=> El centro de masa es el punto de un sistema de partículas que describe el movimien-to de traslación del sistema como un todo.

Más sobre Centro de Masa

¿cómo ubicar el centro de masa de un objeto?

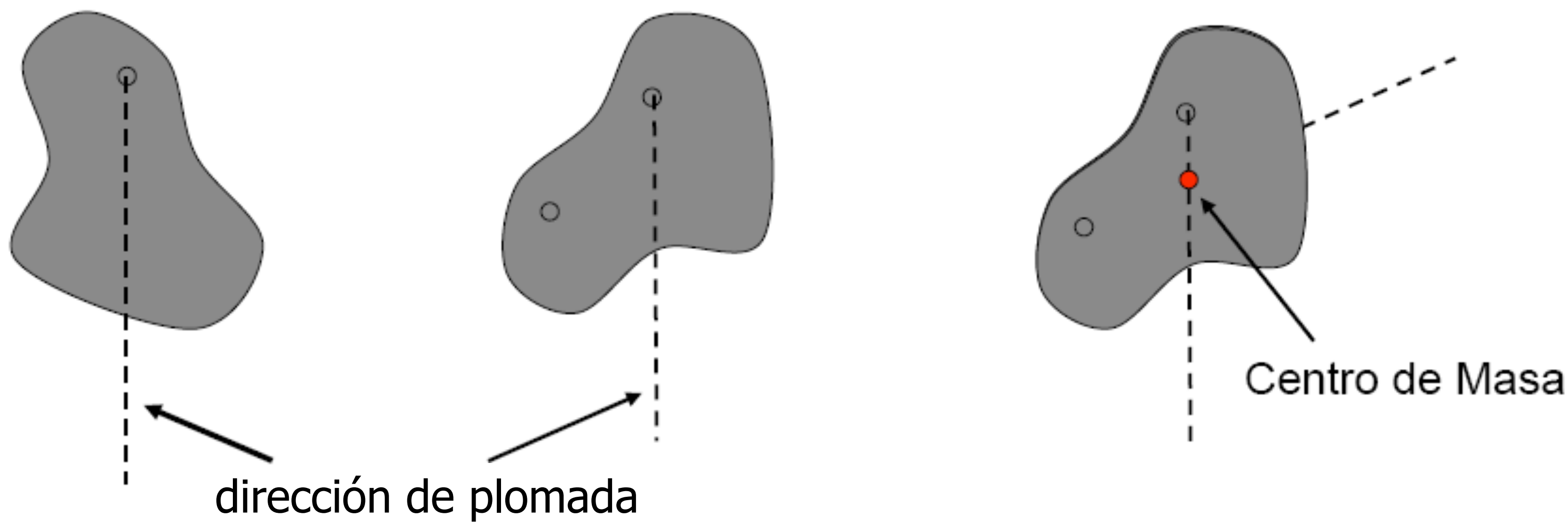


Suspensión desde dos puntos arbitrarios

primer punto

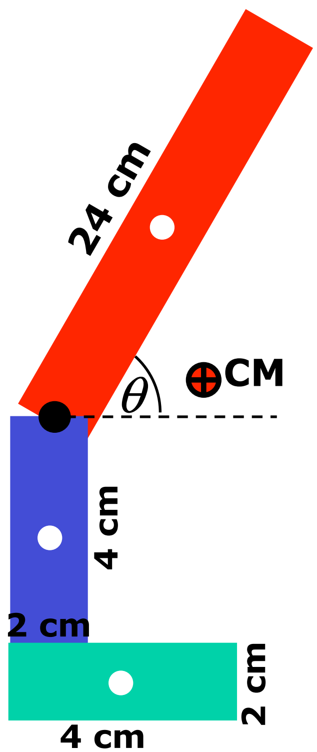
segundo punto

Centro de Masa es la intersección de ambas líneas de plomada



EJEMPLO

Calcular el centro de masa del objeto mostrado en la figura cuando θ = 60°, suponiendo que cada pieza tiene igual masa ¿Cuánto se puede inclinar la parte superior antes de que se caiga?



$$x_{cm} = \frac{2M + M + (1+12\cos\theta)M}{M+M+M} = \frac{4+12\cos\theta}{3}$$

$$x_{cm} = 3.33\ \text{cm}$$

$$y_{cm} = \frac{M + 4M + (6+12\,\text{sen}\,\theta)M}{M+M+M} = \frac{11+12\,\text{sen}\,\theta}{3}$$

$$y_{cm} = 7.13\ \text{cm}$$

$$\frac{4+12\cos\theta}{3} = 4 \quad\Rightarrow\quad \cos\theta = \frac{8}{12} \quad\Rightarrow\quad \theta = 48.19^\circ$$

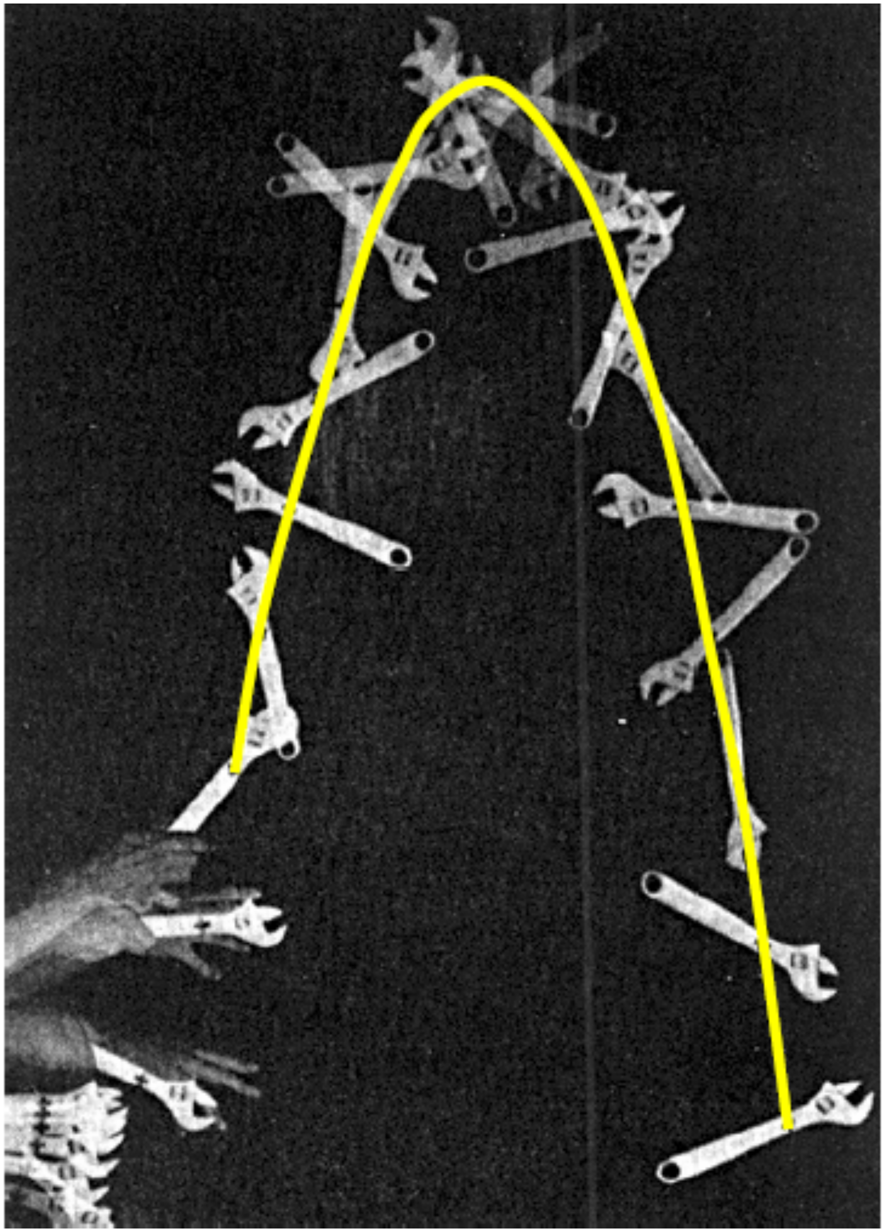
Movimiento del Centro de Masa

La fuerza externa actúa sobre el centro de masa

Centro de masa describe la trayectoria de una masa puntual

Bajo la acción de la fuerza de gravedad la trayectoria del centro de masa es parabólica

Durante el movimiento el objeto gira en torno al centro de masa



- **Movimiento general**

Este movimiento siempre puede considerarse como una combinación de una traslación y una rotación.